

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Maandag 15 augustus 2011, 14.00–17.00

Beknorte antwoorden Tentamen Lineaire Algebra voor N (2DN12).

1. Bepaal voor elke λ de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}\lambda x + y + z &= 3; \\ (1 + \lambda)x + 2y + 2z &= 6; \\ 3y + (3 + \lambda)z &= 7.\end{aligned}$$

Dit kan bijvoorbeeld met vegen. Tijdens het vegen blijkt je $\lambda \neq 0, 1$ nodig te hebben, en onder die voorwaarde is de (unieke) oplossing

$$(x, y, z) = (0, 3 + 2/\lambda, -2/\lambda).$$

Als $\lambda = 0$ blijkt het stelsel strijdig, en is er dus geen oplossing. Als $\lambda = 1$ is er een hele lijn aan oplossingen:

$$(x, y, z) = (1 + s, 1 - 4s, 1 + 3s).$$

2. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven het vlak

$$U = \{(x, y, z, u) \mid x + y + z + u = 0, y + z + 2u = 0\}.$$

- (a) Bepaal een vectorvoorstelling van U .

Een parametervoorstelling is

$$(x, y, z, u) = \lambda(1, -2, 0, 1) + \mu(0, 1, -1, 0).$$

- (b) Bepaal de doorsnede van U met het vlak

$$V : \underline{x} = (1, 2, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 4, -1, 1).$$

Doorsnede bestaat uit 1 punt, namelijk $(0, -1, 1, 0)$.

3. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \text{ voor } t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bepaal de algemene reële oplossing van dit stelsel.

Bepaal eerst de eigenwaarden van de matrix A : $0, 2i, -2i$, met bijbehorende eigenvectoren $(0, 1, -1)^T, (2i, -1, -1)^T, (-2i, -1, -1)$. Dat geeft de algemene complexe oplossing

$$(x(t), y(t), z(t)) = c_1(0, 1, -1) + c_2(2i, -1, -1)e^{2it} + c_3(-2i, -1, -1)e^{-2it},$$

met $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Neem vervolgens het reële deel en het imaginaire deel van de middelste basisoplossing, en vind de algemene reële oplossing

$$(x(t), y(t), z(t)) = d_1(0, 1, -1) + d_2(-2 \sin(2t), -\cos(2t), -\cos(2t)) + d_3(2 \cos(2t), -\sin(2t), -\sin(2t))$$

met $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$.

- (b) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel waarvoor x, y, z alledrie constant zijn.

De vector $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ is een constante oplossing als en alleen als $(0, 0, 0)^T = A(x_0, y_0, z_0)^T$, dus als en alleen als die vector in de kern (nulruimte) van A zit. Die kern wordt opgespannen door de vector $(0, 1, -1)$, zie vorige onderdeel; dus de veelvouden van deze vector zijn precies de constante oplossingen.

4. Zij $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding met karakteristiek polynoom $\det(\lambda I - T) = \lambda^2 - 2$.

- (a) Wat zijn de eigenwaarden van T ?

De nulpunten van het karakteristieke polynoom, dus $\pm\sqrt{2}$.

Laat $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ de bijbehorende eigenvectoren zijn.

- (b) Vind een basis B , uitgedrukt in $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, ten opzichte waarvan T de matrix

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ heeft.}$$

Neem $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Dan gelden dus volgende identiteiten: $A\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ en $A\underline{u}_2 = 2\underline{u}_1$. In het bijzonder is $\underline{u}_1$ geen eigenvector. Omgekeerd, neem $\underline{u}_1$ een willekeurige niet-nul vector in V die geen eigenvector is, dus $\underline{u}_1 := a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2$ met a en b allebei ongelijk aan nul, en definieer $\underline{u}_2 := A\underline{u}_1 = \sqrt{2}(a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2)$. Omdat a en b allebei ongelijk aan nul zijn, is $\underline{u}_2$ niet een veelvoud van $\underline{u}_1$, dus $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ is een basis van V . Verder is aan de eerste identiteit voldaan. Voor de tweede berekenen we:

$$A\underline{u}_2 = A(\sqrt{2}(a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2)) = (\sqrt{2})^2(a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2) = 2\underline{u}_1,$$

zodat ook de tweede identiteit geldt.

5. Bekijk de polynomen p_{-1}, p_0, p_1 in de ruimte $P_2(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad hooguit 2 gedefinieerd door

$$p_{-1}(x) := x(x-1)/2, \quad p_0(x) := -(x+1)(x-1), \quad p_1 := (x+1)x/2.$$

- (a) Bewijs dat p_{-1}, p_0, p_1 een basis van $P_2(\mathbb{R})$ vormen.

Er geldt $p_i(j) = \delta_{i,j}$ voor $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Dus als $c_{-1}p_{-1}(x) + c_0p_0(x) +$

$c_1 p_1(x) = 0$ (het nulpolynoom), dan vind je door achtereenvolgens $-1, 0, 1$ in te vullen voor x dat c_{-1}, c_0, c_1 alledrie nul moeten zijn. Dus p_{-1}, p_0, p_1 zijn lineair onafhankelijk. Ze spannen de ruimte van alle tweedegraads polynomen op, want $q(x) = q(-1) \cdot p_{-1}(x) + q(0) \cdot p_0(x) + q(1) \cdot p_1(x)$.

Zij $A : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $(Aq)(x) = q(-x)$, zodat bijvoorbeeld $A(x^2 - x + 1) = x^2 + x + 1$.

(b) Bewijs dat A lineair is.

Standaard.

(c) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis p_{-1}, p_0, p_1 .

Er geldt $Ap_{-1} = p_1$, $Ap_0 = p_0$, $Ap_1 = p_{-1}$, dus de matrix van A ten opzichte van deze basis is

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Zij $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de afbeelding gedefinieerd door $S(q) := (q(-1), q(0), q(1))$ en zij $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $T(a, b, c) = ap_{-1} + bp_0 + cp_1$. Laat zien dat T en S elkaars inverse zijn.

Dit kan met behulp van matrices, maar ook direct:

$$(ST)(a, b, c) = S(ap_{-1} + bp_0 + cp_1) = (a + 0 + 0, 0 + b + 0, 0 + 0 + c) = (a, b, c)$$

dus ST is de identiteit op $\mathbb{R}^3$. Omdat $P_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^3$ dezelfde dimensie hebben, volgt dat dan ook TS de identiteit op $P_2(\mathbb{R})$ is.

6. Laat $A : V \rightarrow W$ en $B : W \rightarrow V$ lineaire afbeeldingen zijn, en neem aan dat A en B allebei inverteerbaar zijn. Bewijs dat de lineaire afbeeldingen $A \circ B : W \rightarrow W$ en $B \circ A : V \rightarrow V$ precies dezelfde eigenwaarden hebben. (Hint: hoe maak je uit een eigenvector $\underline{v} \in V$ van $B \circ A$ een eigenvector van $A \circ B$?)

Als $\underline{v} \in V$ een eigenvector is van $B \circ A$ met eigenwaarde λ , definieer dan $\underline{w} := A\underline{v}$. Omdat A inverteerbaar is, volgt dat $\underline{w}$ niet nul is. Vervolgens geldt

$$(A \circ B)\underline{w} = AB(A\underline{v}) = A(BA)\underline{v} = A\lambda\underline{v} = \lambda\underline{w},$$

dus $\underline{w}$ is een eigenvector van $A \circ B$ bij eigenwaarde λ . Dus elke eigenwaarde van $B \circ A$ is ook eigenwaarde van $A \circ B$. Omgekeerd volgt dat, net zo, elke eigenwaarde van $A \circ B$ er ook één is van $B \circ A$.

Puntenverdeling:

opgave	1	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6
punten	4	3	3	5	2	1	4	4	2	4	4	4

Het (onafgeronde) cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 4 te delen.