Lineaire afbeeldingen juni 2009

1. Schrijf $y_1 = x_1'$ en $y_2 = x_2'$.
Dan

a. $$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

b. $$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2k}{m} & \lambda & -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{2k}{m} & \lambda \end{bmatrix} \underset{+2\cdot}{=} \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \frac{3k}{m} & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{2k}{m} & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \left(\lambda \cdot \left(\lambda^2 + \frac{2k}{m} \right) \right) + 1 \cdot \left(-\frac{k}{m} \right) \left(-\frac{3k}{m} - 2\lambda^2 \right)$$

$$= \lambda^4 + \frac{2k}{m}\lambda^2 + \frac{3k^2}{m^2} + 2\frac{k}{m}\lambda^2$$

$$= \left(\lambda^2 + \frac{k}{m} \right)\left(\lambda^2 + \frac{3k}{m} \right)$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{of} \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Neem aan dat $\frac{k}{m} = 1$:

$\lambda = \pm i$ of $\lambda = \pm i\sqrt{3}$.

eigenvectoren:

$$\ker(iI - A) = \ker \begin{bmatrix} i & -1 & 0 & 0 \\ 2 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -1 & 0 & 2 & i \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker((-iI) - A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker\left(i\sqrt{3}\,I - A\right) = \ker\begin{bmatrix} i\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & i\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 0 & 2 & i\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker\left(-i\sqrt{3}\,I - A\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \\ -1 \\ i\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\rangle$$

algemene oplossing :

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-it} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \end{bmatrix} e^{i\sqrt{3}t}$$

$$+ c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \\ -1 \\ i\sqrt{3} \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{3}t} \quad ; \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$$

algemene reële oplossing :

$$\underline{x}(t) = d_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} \cos\sqrt{3}\,t \\ -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t \\ -\cos\sqrt{3}\,t \\ \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} \sin\sqrt{3}\,t \\ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}\,t \\ -\sin\sqrt{3}\,t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\,t \end{bmatrix}$$

met $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$

c. "vasthoudt" en "loslaten" betekent:

$x_1'(0) = x_2'(0) = 0$, ofwel

$y_1(0) = y_2(0) = 0$.

vul in:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow d_1 = -\tfrac{1}{2},\ d_3 = -\tfrac{1}{2},\ d_2 = d_4 = 0$$

oplossing: $x_1(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}\,t$

$x_2(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}\,t$.

2. a. $S(f+g)(x) = (f+g)(x-1) = f(x-1) + g(x-1)$

$= (Sf)(x) + (Sg)(x) = (Sf + Sg)(x)$

dus $Sf + Sg = S(f+g)$.

net zo: $S(cf) = c\,S(f)$.

b. vul achtereenvolgens $x = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ in:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$	0	-1	0	$-\frac{3}{4}$

deze matrix is inverteerbaar, dus als $\sum c_i f_i = 0$, dan volgt $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

c. $(Sf_1)(x) = f_1(x-1) = \cos(2\pi x - 2\pi) = \cos 2\pi x = f_1(x)$

dus $Sf_1 = f_1$

Net zo: $Sf_2 = f_2$

$(Sf_3)(x) = (x-1)\cos(2\pi x) = f_3 - f_1$

$(Sf_4)(x) = (x-1)\sin(2\pi x) = f_4 - f_2$

elke functie $f \in U$ is een l.c. van de f_i,

dus Sf een l.c. van de f'ies $f_1, f_2, f_3 - f_1,$ $f_4 - f_2$, dus $Sf \in U$.

d.
$$\begin{bmatrix} 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

e. eigenwaarden: alleen 1 (matrix van T is bovendriehoeks, dus ew. staan op diagonaal).

eigenruimte bij 1: $\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{R}}$

dus niet diagonaliseerbaar, want meetkundige mult. van 1 is 2 en alg. mult. is 4.

f. alle getallen in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(Verg. voor): $\underline{x}^t A \underline{x} = 1$ met

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\cdot\left((\lambda-1)(\lambda-2) - 1\right)$$
$$+ 1 \cdot (-\lambda + 2 - 1)$$
$$-1 \cdot (1 + \lambda - 1)$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - 2\lambda + 1$$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 - 2\lambda + 1$$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

eigenwaarden: $\lambda = 0$ of $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

eigenvectoren: bij $\lambda = 0$: $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

bij $\lambda = 2 + \sqrt{2}$: ker $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & -1 \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$ en bij $\lambda = 2 - \sqrt{2}$: $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$

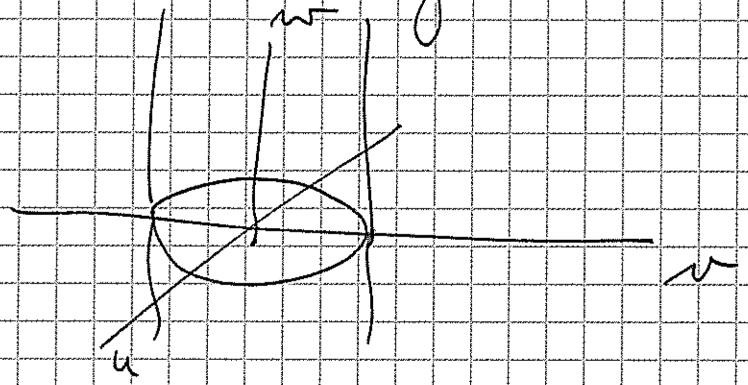
dus $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

λ uit opgave : $2+\sqrt{2}$

μ " " : $2-\sqrt{2}$.

verg. wordt : $(2+\sqrt{2})u^2 + (2-\sqrt{2})v^2 = 1$

b. Dit is een cylinder :



alleen w-as snijdt hem niet.

in x, y, z - coordinaten :

de ~~rechte~~ 1-dim. rte opgespannen door

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. a. matrix van T t.o.v. standaardbasis

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eigenwaarden:

* 1 met eigenruimte $\langle (1,0,1) \rangle$
* -1 met eigenruimte $\langle (-1,0,1) \rangle$.
* 1 met eigenruimte $\langle (0,1,0$

b. $TA(-1,0,1) = AT(-1,0,1)$

$= -A(-1,0,1)$. Dus $A(-1,0,1)$

zit in de eigenruimte van T bij eigenwaarde -1, die door $(-1,0,1)$ opgespannen wordt.

Dus $A(-1,0,1) = \lambda \cdot (-1,0,1)$, zekere λ.