

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

15 juni 2009

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

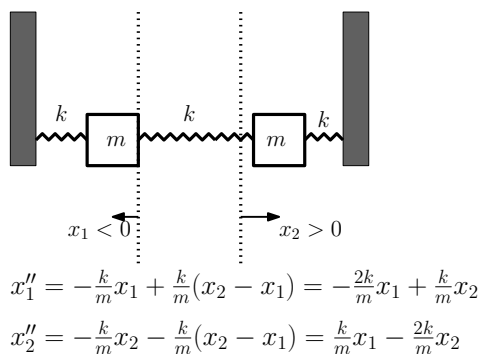
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Onderdeel	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	2f(bonus)	3a	3b	4a	4b
Aantal punten	2	6	2	2	2	3	4	3	2	5	3	3	5

1.

In de figuur hiernaast staat een opstelling met twee identieke massa's (met massa m) die middels drie identieke veren (met veerconstante k) aan elkaar verbonden zijn. Eronder staan twee gekoppelde *tweede-orde* differentiaalvergelijkingen die het systeem beschrijven.



- (a) Laat zien dat het bovenstaande stelsel equivalent is met een *eerste-orde* stelsel van de vorm

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

waarbij A een 4×4 -matrix is.

Neem nu aan dat $\frac{k}{m} = 1$. Gegeven is dat de matrix A dan gelijk is aan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Bepaal de algemene *reële* oplossing van het eerste-ordestelsel uit onderdeel (a) voor deze A .

- (c) Als men de linkermassa 1 eenheid links van de equilibriumpositie en de rechtermassa op diens equilibrium positie vasthoudt (dus $x_1(0) = -1$ en $x_2(0) = 0$), waarna men ze op $t = 0$ beide gelijktijdig loslaat, bereken dan x_1 en x_2 als functie van de tijd.

2. In deze opgave is V de reële vectorruimte bestaande uit alle continue functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, is U de deelruimte van V opgespannen door functies $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_1(x) = \cos(2\pi x), f_2(x) = \sin(2\pi x), f_3(x) = x \cos(2\pi x), f_4(x) = x \sin(2\pi x)$$

en is S de afbeelding $V \rightarrow V$ gedefinieerd door $(Sf)(x) = f(x - 1)$. Er geldt dus bijvoorbeeld: als f de functie $x \mapsto x^2$ is, dan is Sf de functie $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.

- (a) Bewijs dat S lineair is.
 (b) Bewijs dat $f_1, \dots, f_4$ lineair onafhankelijk zijn.
 (c) Bewijs dat S elke vector uit U op een vector uit U afbeeldt.

We schrijven T voor de beperking van S tot U , d.w.z. voor de afbeelding van U naar U gedefinieerd door $(Tf)(x) = f(x - 1)$.

- (d) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ van U .
 (e) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van T . Is T diagonaliseerbaar?
 (f) (bonus) Bepaal alle eigenwaarden van S .

3. Bekijk het oppervlak

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1\}$$

- (a) Bepaal een orthogonale overgangsmatrix P en positieve getallen $\lambda > \mu$ zo dat in de coördinaten u, v, w gegeven door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

het oppervlak S gegeven wordt door de vergelijking $\lambda u^2 + \mu v^2 = 1$.

- (b) Er is precies één lijn door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ die het oppervlak S niet snijdt. Vind een parametervoorstelling in (x, y, z) -coördinaten voor die lijn.

4. Zij T de lineaire afbeelding $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ gedefinieerd door $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, ix_2, x_1)$ en zij A een lineaire afbeelding van $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ die voldoet aan $A \circ T = T \circ A$.

- (a) Bepaal de eigenruimten van T .
 (b) Bewijs dat $(-1, 0, 1)$ een eigenvector van A is.