

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Maandag 27 juni 2011, 9.00-12.00

Uitwerkingen Tentamen Lineaire Algebra voor N (2DN12).

1. Bepaal voor elke λ de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x + \lambda y + (2\lambda - 1)z &= 0; \\(3 - \lambda)x + 2y + (\lambda + 1)z &= 0; \\x + y + (3 - 2\lambda)z &= 0.\end{aligned}$$

Bereken eerst de determinant van de coëfficiëntmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2\lambda - 1 \\ 3 - \lambda & 2 & \lambda + 1 \\ 1 & 1 & 3 - 2\lambda \end{bmatrix};$$

die is

$$2(3 - 2\lambda) - (\lambda + 1) - \lambda(3 - \lambda)(3 - 2\lambda) + \lambda(\lambda + 1) + (2\lambda - 1)(1 - \lambda) = -2\lambda^3 + 8\lambda^2 - 10\lambda + 4.$$

Hiervan is $\lambda = 1$ een nulpunt, en staartdelen geeft determinant $-2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Dus als λ niet in $\{1, 2\}$ zit, dan is de enige oplossing de nulvector. Voor $\lambda = 1$ wordt de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en de oplossingsruimte wordt opgespannen door de vectoren $(1, -1, 0)$ en $(1, 0, -1)$ (vegen). Voor $\lambda = 2$ wordt de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

en de oplossingsruimte wordt opgespannen door $(5, -4, 1)$ (vegen).

2. In $\mathbf{R}^4$ is gegeven het vlak $U = \{(x, y, z, u) \mid x + y + z = 0, y + 2z + 3u = 0\}$.

- (a) Bepaal een vectorvoorstelling van U .

De coëfficiëntmatrix is al in “bovendriehoeksvorm”. Neem $z = s$ en $u = t$ als vrije parameters, en dan is $y = -2s - 3t$ en $x = -y - z = s + 3t$ de gevraagde parametervoorstelling.

- (b) Bepaal de doorsnede van U met het vlak

$$V : \underline{x} = (1, 0, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0, 1) + \mu(1, 0, -2, 0).$$

Vul de paramtervoorstelling voor V in de vergelijkingen voor U in; dit geeft het volgende stelsel voor λ en μ :

$$\begin{aligned} 2 + \lambda - \mu &= 0 \\ 8 + 4\lambda - 4\mu &= 0. \end{aligned}$$

Dit stelsel is afhankelijk, dus de vlakken snijden elkaar in de lijn met paramtervoorstelling $(1, 0, 1, 2) + (\mu - 2)(0, 1, 0, 1) + \mu(1, 0, -2, 0) = (1, -2, 1, 0) + \mu(1, 1, -2, 1)$.

3. In $\mathbf{R}^4$ met het standaardinproduct is $U = \langle (1, 2, 2, 4), (3, 3, 0, 4) \rangle$.

- (a) Bepaal een orthonormale basis van U . De eerste basisvector is $\underline{v}_1 = (1, 2, 2, 4)/5$. Definieer vervolgens de hulpvector $\underline{u}_2 = (3, 3, 0, 4) - \frac{25}{25}(1, 2, 2, 4) = (2, 1, -2, 0)$ en vind de tweede basisvector $\underline{v}_2 = \underline{u}_2/||\underline{u}_2|| = (2, 1, -2, 0)/3$.
- (b) Bepaal de loodrechte projectie van $(6, 3, 3, 8)$ op U . Makkelijk met de orthogonale basis uit onderdeel (a): $10\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 = (4, 5, 2, 8)$.
- (c) Wat is de afstand van $(6, 3, 3, 8)$ tot U . Dat is de lengte van de verschilvector $(2, -2, 1, 0)$, dus 3.

4. Bekijk voor een reël positief getal $b > 0$ het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Bewijs dat voor elke oplossing $(x(t), y(t))$ van dit stelsel de functie $x(t)$ voldoet aan de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$x''(t) = -2x(t) - bx'(t).$$

Dit is de vergelijking voor een gedempte harmonische oscillator, waarin b voor de sterkte van de demping staat.

Er geldt $x'(t) = 0x(t) + 1y(t) = y(t)$ (eerste rij van het stelsel), dus $x''(t) = y'(t) = -2x(t) - by(t) = -2x(t) - bx'(t)$ (met de tweede rij van het stelsel).

- (b) Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel (*) voor $b = 2$. Het stelsel heeft coëfficiëntmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

met karakteristiek polynoom $t(t + 2) + 2 = t^2 + 2t + 2$ en nulpunten $t = -1 \pm i$. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-1 + i$ is de kern van de matrix

$$\begin{bmatrix} -1 + i & -1 \\ 2 & 1 + i \end{bmatrix}$$

en die wordt opgespannen door de vector $(1, -1 + i)^T$. Een complexe oplossing wordt dus gegeven door

$$(x(t), y(t)) = (1, -1 + i)e^{(-1+i)t} = (1, -1 + i)e^{-t}(\cos t + i \sin t)$$

Het reële deel hiervan (voor reëelwaardige tijd t) is

$$e^{-t}(\cos t, -\cos t - \sin t)$$

en het imaginaire deel ervan is

$$e^{-t}(\sin t, -\sin t + \cos t).$$

Deze twee vectorwaardige functies samen spannen de reële oplossingsruimte op.

- (c) Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel (*) voor $b = 3$.

Nu is de coëfficiëntmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

met karakteristiek polynoom $t(t + 3) + 2 = t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2)$ met nulpunten $t = -1$ en $t = -2$. De eigenruimte bij -1 wordt opgespannen door de vector $(1, -1)^T$, en die bij -2 wordt opgespannen door de vector $(1, -2)^T$. De algemene reële oplossing is dus

$$(x(t), y(t)) = c_1(1, -1)e^{-t} + c_2(1, -2)e^{-2t}.$$

- (d) Bekijk een oplossing van (*) met $x(0) = 1$. Bij geringe damping zal de oscillator oscilleren, wat betekent dat de uitslag $x(t)$ oneindig vaak 0 wordt. Bij grote damping is dit niet het geval. Bij welke waarde van b ligt het omslagpunt?

Het karakteristieke polynoom van de coëfficiëntmatrix is $t(t+b)+2 = t^2+bt+2$. De discriminant is $b^2 - 8$. Als deze positief is, dan heeft het karakteristieke polynoom twee negatieve nulpunten, zoals in onderdeel (c), en treedt geen oscillatie op. Als de discriminant negatief is, dan heeft het karakteristieke polynoom twee complex geconjugeerde nulpunten (met negatief reëel deel), en treedt wel oscillatie op. Dus het omslagpunt ligt bij $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. (Bij die specifieke waarde van B is de coëfficiëntmatrix niet diagonaliseerbaar, maar oscilleert de algemene oplossing niet. Dit geval zelf hoeft u niet te analyseren.)

Zie ommezijde.

5. Zij P_3 de reële vectorruimte van polynomen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ met a_0, a_1, a_2, a_3 reële getallen. Zij $T : P_3 \rightarrow P_3$ de afbeelding gedefinieerd door $T(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$, zodat bijvoorbeeld geldt $T(x^2+2) = ((x+1)^2+2) + ((x-1)^2+2) = 2x^2 + 6$.

(a) Bewijs dat T lineair is. *Standaard.*

(b) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaard basis $1, x, x^2, x^3$.
Er geldt $T1 = 2$, $Tx = 2x$, $Tx^2 = 2x^2 + 2$ en $Tx^3 = 2x^3 + 6x$. dit geeft:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van T .

De eigenwaarden zijn die van de matrix, dus alleen 2 (want bovendriehoeks). De eigenruimte van de matrix bij 2 wordt opgespannen door $(1, 0, 0, 0)^T$ en $(0, 1, 0, 0)^T$. Dus de eigenruimte van T bij 2 bestaat uit alle lineaire polynomen.

(d) Is T diagonaliseerbaar?

Nee; de algebraïsche multipliciteit van 2 is 4 terwijl de meetkundige multipliciteit 2 is.

6. Van een symmetrische 3×3 -matrix A is gegeven dat $A(1, 1, 1)^T = (1, 1, 1)^T$, $A(1, -2, 1)^T = (2, -4, 2)^T$ en dat A niet inverteerbaar is.

(a) Bepaal $\underline{v} \in \mathbf{R}^3$ zo dat $\{(1, 1, 1), (1, -2, 1), \underline{v}\}$ een orthogonale basis B van $\mathbf{R}^3$ is, en bewijs dat $A\underline{v} = \underline{0}$.

$\underline{v}$ vind je met Gram-Schmidt, of gewoon met het blote oog: $\underline{v}$ moet loodrecht staan op $(1, 1, 1) - (1, -2, 1) = (0, 2, 0)$, dus middelste coördinaat is 0. Dan volgt meteen dat alleen de niet-nul veelvouden van $(1, 0, -1)$ voldoen. We nemen $\underline{v} = (1, 0, -1)$.

We kennen twee eigenvectoren van A , namelijk $(1, 1, 1)$ bij eigenwaarde 1 en $(1, -2, 1)$ bij eigenwaarde 2. Omdat A niet inverteerbaar is, heeft A ook de eigenwaarde 0. Omdat A symmetrisch is, staat de eigenruimte bij 0 loodrecht op de gegeven twee eigenvectoren. Dus die eigenruimte wordt opgespannen door $\underline{v}$, zodat $A\underline{v} = \underline{0}$.

(b) Bepaal de overgangsmatrix $P_{E \rightarrow B}$ van de standaardbasis $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ naar B .

De overgangsmatrix in de omgekeerde richting is

$$P_{B \rightarrow E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

en $P_{E \rightarrow B}$ is hier de inverse van, dus (vegen)

$$P_{E \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Bepaal de matrix A .
A is nu gelijk aan

$$P_{B \rightarrow E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_{E \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 5/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Puntenverdeling:

opgave	1	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c
punten	5	2	3	3	3	2	2	4	4	2	2	3	3	2	4	3	3

Het onafgeronde cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen. Voor wie dat van toepassing is, wordt een gewogen gemiddelde van dit onafgeronde cijfer met dat van de tussentoetsen uitgerekend. Tenslotte wordt voor het eindcijfer van het vak afgerond naar het dichtstbijzijnde gehele getal.