

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Maandag 27 juni 2011, 9.00-12.00

Tentamen Lineaire Algebra voor N (2DN12).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Motiveer Uw antwoorden, en laat relevante gedeelten van berekeningen zien.

1. Bepaal voor elke λ de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x + \lambda y + (2\lambda - 1)z &= 0; \\(3 - \lambda)x + 2y + (\lambda + 1)z &= 0; \\x + y + (3 - 2\lambda)z &= 0.\end{aligned}$$

2. In $\mathbf{R}^4$ is gegeven het vlak $U = \{(x, y, z, u) \mid x + y + z = 0, y + 2z + 3u = 0\}$.

- (a) Bepaal een vectorvoorstelling van U .
(b) Bepaal de doorsnede van U met het vlak

$$V : \underline{x} = (1, 0, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0, 1) + \mu(1, 0, -2, 0).$$

3. In $\mathbf{R}^4$ met het standaardinproduct is $U = \langle (1, 2, 2, 4), (3, 3, 0, 4) \rangle$.

- (a) Bepaal een orthonormale basis van U .
(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(6, 3, 3, 8)$ op U .
(c) Wat is de afstand van $(6, 3, 3, 8)$ tot U ?

4. Bekijk voor een reël positief getal $b > 0$ het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Bewijs dat voor elke oplossing $(x(t), y(t))$ van dit stelsel de functie $x(t)$ voldoet aan de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$x''(t) = -2x(t) - bx'(t).$$

Dit is de vergelijking voor een gedempte harmonische oscillator, waarin b voor de sterkte van de demping staat.

- (b) Bepaal de algemene *reële* oplossing van het stelsel (*) voor $b = 2$.
(c) Bepaal de algemene *reële* oplossing van het stelsel (*) voor $b = 3$.
(d) Bekijk een oplossing van (*) met $x(0) = 1$. Bij geringe demping zal de oscillator oscilleren, wat betekent dat de uitslag $x(t)$ oneindig vaak 0 wordt. Bij grote demping is dit niet het geval. Bij welke waarde van b ligt het omslagpunt?

Zie ommezijde.

5. Zij P_3 de reële vectorruimte van polynomen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ met a_0, a_1, a_2, a_3 reële getallen. Zij $T : P_3 \rightarrow P_3$ de afbeelding gedefinieerd door $T(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$, zodat bijvoorbeeld geldt $T(x^2+2) = ((x+1)^2+2) + ((x-1)^2+2) = 2x^2 + 6$.

(a) Bewijs dat T lineair is.

(b) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaard basis $1, x, x^2, x^3$.

(c) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van T .

(d) Is T diagonaliseerbaar?

6. Van een symmetrische 3×3 -matrix A is gegeven dat $A(1, 1, 1)^T = (1, 1, 1)^T$, $A(1, -2, 1)^T = (2, -4, 2)^T$ en dat A niet inverteerbaar is.

(a) Bepaal $\underline{v} \in \mathbf{R}^3$ zo dat $\{(1, 1, 1), (1, -2, 1), \underline{v}\}$ een orthogonale basis B van $\mathbf{R}^3$ is, en bewijs dat $A\underline{v} = \underline{0}$.

(b) Bepaal de overgangsmatrix $P_{E \rightarrow B}$ van de standaardbasis $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ naar B .

(c) Bepaal de matrix A .

Puntenverdeling:

opgave	1	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c
punten	5	2	3	3	3	2	2	4	4	2	2	3	3	2	4	3	3

Het onafgeronde cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen. Voor wie dat van toepassing is, wordt een gewogen gemiddelde van dit onafgeronde cijfer met dat van de tussentoetsen uitgerekend. Tenslotte wordt voor het eindcijfer van het vak afgerond naar het dichtstbijzijnde gehele getal.