

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Maandag 15 augustus 2011, 14.00–17.00

Tentamen Lineaire Algebra voor N (2DN12).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Motiveer Uw antwoorden, en laat relevante gedeelten van berekeningen zien.

1. Bepaal voor elke λ de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}\lambda x + y + z &= 3; \\ (1 + \lambda)x + 2y + 2z &= 6; \\ 3y + (3 + \lambda)z &= 7.\end{aligned}$$

2. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven het vlak

$$U = \{(x, y, z, u) \mid x + y + z + u = 0, y + z + 2u = 0\}.$$

- (a) Bepaal een vectorvoorstelling van U .
(b) Bepaal de doorsnede van U met het vlak

$$V : \underline{x} = (1, 2, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 4, -1, 1).$$

3. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \text{ voor } t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bepaal de algemene *reële* oplossing van dit stelsel.
(b) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel waarvoor x, y, z alledrie constant zijn.
4. Zij $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding met karakteristiek polynoom $\det(\lambda I - T) = \lambda^2 - 2$.

- (a) Wat zijn de eigenwaarden van T ?

Laat $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ de bijbehorende eigenvectoren zijn.

- (b) Vind een basis B , uitgedrukt in $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, ten opzichte waarvan T de matrix

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ heeft.}$$

Zie ommezijde

5. Bekijk de polynomen p_{-1}, p_0, p_1 in de ruimte $P_2(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad hooguit 2 gedefinieerd door

$$p_{-1}(x) := x(x-1)/2, \quad p_0(x) := -(x+1)(x-1), \quad p_1 := (x+1)x/2.$$

- (a) Bewijs dat p_{-1}, p_0, p_1 een basis van $P_2(\mathbb{R})$ vormen.

Zij $A : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $(Aq)(x) = q(-x)$, zodat bijvoorbeeld $A(x^2 - x + 1) = x^2 + x + 1$.

- (b) Bewijs dat A lineair is.

- (c) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis p_{-1}, p_0, p_1 .

- (d) Zij $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de afbeelding gedefinieerd door $S(q) := (q(-1), q(0), q(1))$ en zij $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $T(a, b, c) = ap_{-1} + bp_0 + cp_1$. Laat zien dat T en S elkaars inverse zijn.

6. Laat $A : V \rightarrow W$ en $B : W \rightarrow V$ lineaire afbeeldingen zijn, en neem aan dat A en B allebei inverteerbaar zijn. Bewijs dat de lineaire afbeeldingen $A \circ B : W \rightarrow W$ en $B \circ A : V \rightarrow V$ precies dezelfde eigenwaarden hebben. (Hint: hoe maak je uit een eigenvector $\underline{v} \in V$ van $B \circ A$ een eigenvector van $A \circ B$?)

Puntenverdeling:

opgave	1	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6
punten	4	3	3	5	2	1	4	4	2	4	4	4

Het (onafgeronde) cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 4 te delen.