TU/e Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology

Duidelijk en met blokletters invullen

Naam en voorletters: Jan [illegible]

Ident.nr.:

Vakcode: 2DN12

Opleiding:

Vaknaam:

Datum: 9-8-2010

1. Als $\lambda \cdot \overset{x}{\overbrace{(\underline{a}+3\underline{b})}} + \beta \overset{y}{\overbrace{(2\underline{a}+\underline{b})}} + \nu \overset{z}{\overbrace{(\mu\underline{a}+\underline{c})}} = 0$

$$= (\lambda+2\beta+\nu\cdot\mu)\cdot\underline{a} + (3\lambda+\beta)\underline{b} + \nu\cdot\underline{c}$$

dan $\lambda+2\beta+\nu\cdot\mu = 0$ (want $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ onafh.)

$3\lambda+\beta = 0$

$\nu = 0$

dus $0=0$ en $\left.\begin{array}{l} \lambda+2\beta=0 \\ 3\lambda+\beta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=\beta=0$.

dus $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ onafh.

2.a Los het stelsel $\begin{array}{l} x+y+z+u=0 \\ y+z+2u=0 \end{array}$

op:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow \quad x = +u \qquad y = -z-2u$

Parametervoorstelling:

$$\boxed{\lambda\cdot(1,-2,0,+1) + \mu\cdot(0,1,-1,0)}$$

b. Vind λ en μ zo dat

$$(1,2,1,2) + \lambda(1,-1,1,1) + \mu(0,4,-1,1) \in U$$
$$\Downarrow \; (1+\lambda, 2-\lambda+4\mu, 1+\lambda-\mu, 2+\lambda+\mu)$$

invullen in verg. voor U:

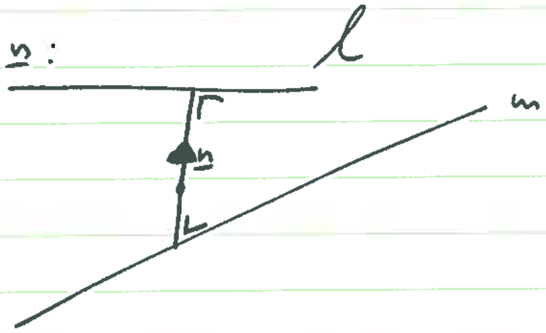
$$6 + 2\lambda + 4\mu = 0$$
$$7 + 2\lambda + 5\mu = 0$$

dus (oplossen): $\mu = -1$ en $\lambda = -1$

dus doorsnede bestaat uit één punt:

$$(1,2,1,2) - (1,-1,1,1) - (0,4,-1,1)$$
$$= \boxed{(0,-1,1,0)}$$

3. Vind eerst $\underline{n}$:



$\underline{n}$ is een normaal van het vlak opgespannen door $(2,3,4)$ en $(1,2,3)$. Dus bijv. $\underline{n} = (1,-2,1)$ (het uitproduct);

nu moet $(2,2,3) + \mu(1,2,3) + \alpha \cdot (1,-2,1)$ gelijk zijn aan $(2,5,3) + \lambda (2,3,4)$

$\rightsquigarrow$ stelsel:

$$\begin{aligned} \mu + \alpha - 2\lambda &= 0 \\ 2\mu - 2\alpha - 3\lambda &= 3 \\ 3\mu + \alpha - 4\lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\boxed{\mu = \alpha = \lambda = -1.}$

punt op m:
$(2,2,3) - (1,2,3) = (1,0,0)$

punt op l: $(2,5,3) - (2,3,4) = (0,2,$

$\boxed{\text{afstand: } \|(-1) \cdot \underline{n}\| = \sqrt{6}.}$

4.a. $\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda & & & & -1 \\ & \lambda & & -1 & \\ & -1 & \lambda & & \\ & & -1 & \lambda & \\ -1 & & & & \lambda \end{bmatrix}$

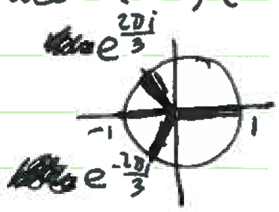
$= \lambda \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda & & -1 & \\ -1 & \lambda & & \\ & -1 & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} - 1 \cdot \det\begin{bmatrix} & & & -1 \\ \lambda & & -1 & \\ -1 & \lambda & & \\ & -1 & \lambda & \end{bmatrix}$

$= \lambda^2 \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda & & -1 \\ -1 & \lambda & \\ & -1 & \lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} \lambda & & -1 \\ -1 & \lambda & \\ & -1 & \lambda \end{bmatrix}$

$= (\lambda^2 - 1) \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda & & -1 \\ -1 & \lambda & \\ & -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1).$

b. eigenwaarden van A: $\lambda = \pm 1 \ \vee \ \lambda = e^{k \cdot \frac{2\pi i}{3}}$
met $k = 1, 2$

ofwel: $(\lambda = \pm 1)$ of $\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i \sin\frac{2\pi}{3}$
$= -\frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}\sqrt{3})\, i$



eigenruimten:

$\lambda = 1$: opgespannen van $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\lambda = -1$: opgespannen van $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i =: \omega$

$\omega^2 = -\omega - 1$

ω voldoet aan: $\omega^3 = 1$ $\quad \omega \neq 1$

dus $\quad \omega - 1 \quad (\omega^3 - 1)\ \omega^2 + \omega + 1$

$\frac{\omega^3 - \omega^2}{\omega^2 - 1} \ldots$

dus $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology

Duidelijk en met blokletters invullen

Naam en voorletters: Ident.nr.:

Vakcode: Opleiding:

Vaknaam: Datum:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \omega & & & & -1 & 0 \\ & \omega & & -1 & & 0 \\ & -1 & \omega & & & 0 \\ & & -1 & \omega & & 0 \\ -1 & & & & \omega & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & \overset{\neq 0}{-1+\omega^2} & 0 \\ & \omega & & -1 & & 0 \\ & -1 & \omega & & & 0 \\ & & -1 & \omega & & 0 \\ -1 & & & & \omega & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & 1 & 0 \\ & \omega & & -1 & & 0 \\ & -1 & \omega & & & 0 \\ & & -1 & \omega & & 0 \\ 1 & & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Los "middelste stelsel" op:

(eerste en laatste coörd. moeten nul zijn).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \omega & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \omega & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \omega & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\omega-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -\omega-1 & 0 \\ & -1 & \omega & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\omega-1 \\ & -1 & \omega \end{array}\right]$$

→ oplossingsruimte opgespannen door

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alg. opl. over $\mathbb{C}$:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\omega t}$$

$$+ c_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\omega^2 t}.$$

over $\mathbb{R}$:

~~$c_1 \cdots + c_2 \cdots + c_3 \cdots + d_4 \mathrm{Re}$~~

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + d_4 \cdot \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\omega t} \right) + d_5 \,\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\omega t} \right)$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad} + d_4 \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}t + i \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3}t\right) \cdot e^{\frac{1}{2}t} \right)$$

$$+ d_5 \,\mathrm{Im} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad} + d_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}t \\ -\frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

$$+ d_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{1}{2}\sqrt{3}t - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{1}{2}\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$$

c. Als de oplossing voor positieve t begrensd moet blijven, moeten c_1 en c_2 nul zijn.*
dus dimensie = 3.

*(die horen bij onbegrensde opl, terwijl de car andere (basis-) oplossingen voor $t > 0$ begrensd zijn).

Voor alle $f, g \in V$:

5.a. $B(f+g) = (f+g)' - 3(f+g) = f' + g' - 3f - 3g$
$= (f' - 3f) + (g' - 3g) = Bf + Bg$

Voor alle $f \in B$, $c \in \mathbb{R}$:

$B(c \cdot f) = (cf)' - 3(cf) = c \cdot f' - c3f$
$= c \cdot (f' - 3f) = c \cdot Bf$.

b. stel (a) $\lambda_0 x^0 e^{3x} + \lambda_1 x^1 e^{3x} + \lambda_2 x^2 e^{3x} + \lambda_3 x^3 e^{3x} = 0$ (voor alle x).

Laat B los op deze identiteit:

$\left(B(x^i e^{3x}) = i x^{i-1} e^{3x} + 3x^i e^{3x} - 3x^i e^{3x} = i x^{i-1} e^{3x}. \right)$

dus: (b) $\lambda_1 x^0 e^{3x} + 2\lambda_2 x e^{3x} + 3\lambda_3 x^2 e^{3x} = 0$

en nog een keer B erop loslaten:

(c) $2\lambda_2 e^{3x} + 6\lambda_3 x e^{3x} = 0$

en nog eens: (d) $6\lambda_3 e^{3x} = 0$ voor alle x

dus $\boxed{\lambda_3 = 0}$. Invullen in (c) geeft $\boxed{\lambda_2 = 0}$.

Invullen in (b) geeft $\lambda_1 = 0$. Invullen in (a) geeft $\boxed{\lambda_0 = 0}$.

c. $[A]_{\text{basis bij } B}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & e^{3x} & xe^{3x} & x^2e^{3x} & x^3e^{3x} \\ \hline e^{3x} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ xe^{3x} & 0 & 1 & -2 & 0 \\ x^2e^{3x} & 0 & 0 & 2 & -3 \\ x^3e^{3x} & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

d. eigenwaarden: 0, 1, 2, 3 (want $[A]$ is bovendriehoekig).

eigenruimten: $E_0 = \langle e^{3x} \rangle$ $E_1 = \langle (x-1)e^{3x} \rangle$

$E_2 = \langle (x-1)^2 e^{3x} \rangle$, $E_3 = \langle (x-1)^3 e^{3x} \rangle$.

6. Als $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ met $\underline{v} \neq 0$ dan geldt: $A^k \underline{v} = \lambda^k \underline{v}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; I\underline{v} = \underline{v}$

dus omdat $\underline{v} \neq 0$: $\lambda^k = 1$,

dus ook $|\lambda|^k = 1$ dus $|\lambda| = 1$.