

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

28 juni 2010

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Onderdeel	1a	1b	2	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b
Aantal punten	3	2	4	3	3	3	4	3	2	3	2	2	3	3

1. Bekijk de kromme

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 32x^2 + 60xy + 7y^2 = 13\}.$$

- (a) Bepaal een orthogonale overgangsmatrix P en getallen $\lambda > \mu$ zo dat in de coördinaten u, v gegeven door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

de kromme K gegeven wordt door de vergelijking $\lambda u^2 + \mu v^2 = 13$.

- (b) Bepaal de (x, y) -coördinaten van de punten van K op minimale afstand van de oorsprong $(0, 0)$.

2. Zij $V = \mathbb{R}^\infty$ de (oneindig-dimensionale) reële vectorruimte bestaande uit alle oneindige rijen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ met $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging gaan componentsgewijs. Zij A de lineaire afbeelding van V naar V die $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ afbeeldt op $(a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$. Bepaal alle reële eigenwaarden van A , alsmede hun bijbehorende eigenruimten.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door $\mathcal{A}(1, 1, 1) = (1, 2, 3, 4)$, $\mathcal{A}(1, 1, -1) = (3, 0, 3, 3)$, $\mathcal{A}(1, 2, 1) = (4, 2, 6, 7)$.

- (a) Wat is de dimensie van de nulruimte $\mathcal{N}$ van $\mathcal{A}$? Geef een basis voor $\mathcal{N}$.
- (b) Wat is de dimensie van de beeldruimte $\mathcal{R}$ van $\mathcal{A}$? Geef een basis voor $\mathcal{R}$.
- (c) Geef de matrix van A ten opzichte van de standaardbases.

Zie ommezijde!

4. Bekijk het stelsel reële differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ voor } t \in \mathbb{R}$$

- (a) Bepaal de algemene *reële* oplossing van dit stelsel.
- (b) Bepaal alle oplossingen van dit stelsel waarvoor x, y, z alledrie constant zijn.

5. Zij $P_2(\mathbb{R})$ de ruimte van reële polynomen van graad hooguit 2. Bekijk de afbeelding A van $P_2(\mathbb{R})$ naar $P_2(\mathbb{R})$ die een polynoom $p(x)$ afbeeldt op het polynoom $(x-1) \cdot p'(x)$, waar $p'(x)$ de afgeleide van $p(x)$ is.

- (a) Bewijs dat A lineair is.
- (b) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis $1, x, x^2$ van $P_2(\mathbb{R})$.
- (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A .
- (d) Bepaal $A^{100}(x^2 - x)$. (Let op: er wordt naar een polynoom gevraagd, en dus bijvoorbeeld niet naar een kolomvector.)

6. Laat A een reële $n \times n$ -matrix zijn.

- (a) Neem aan dat $A^T = -A$. Bewijs dat voor alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $A\underline{v}$ loodrecht op $\underline{v}$ staat (ten opzichte van het standaard-inproduct op $\mathbb{R}^n$).
- (b) Neem nu aan dat voor alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $A\underline{v}$ loodrecht op $\underline{v}$ staat. Bewijs dat $A^T = -A$.