

1. a) $1 \mapsto (1, 1, 1, 1)$, $x \mapsto (1, 2, 3, 4)$, $x^2 \mapsto (1, 4, 9, 16)$, daarmee wordt de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

- b) De dimensie van $R(A)$ is de rang van de matrix van A , dus 3.
2. a) M_a is een bovendriehoeksmatrix, dus de eigenwaarden zijn de elementen op de diagonaal, 2 en $1 + a^2$. We kunnen natuurlijk ook $\det(\lambda I - M_a) = (\lambda - 2)(\lambda - 1 - a^2) = 0$ 'oplossen'.
- b) M_a is zeker diagonaliseerbaar als de eigenwaarden verschillend zijn, met andere woorden als $a \neq \pm 1$. Voor $a = -1$ is de matrix $2I$, en dus ook diagonaliseerbaar, maar voor $a = +1$ niet.
3. a) De kromme K is van de vorm $x^T A x = 25$, met

$$A = \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix}$$

Deze matrix heeft eigenwaarden 25 en 50, en bijbehorende (onderling loodrechte) eigenruimten $E_{25} = \langle (3, 4)^T \rangle$ en $E_{50} = \langle (4, -3)^T \rangle$. Een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren krijg je door bovenstaande representanten door hun lengte, 5, te delen, en dus

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = P^{-1} A P, \quad \text{met} \quad P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

In termen van u en v krijgen we nu $25u^2 + 50v^2 = 25$, en dus $u^2 + 2v^2 = 1$.

- b) Het punt het dichtst bij de oorsprong hiervan is $(u, v) = (0, 1/\sqrt{2})$, en dus $(x, y) = (4\sqrt{2}, -3\sqrt{2})/10$
4. De matrix heeft eigenwaarden 1 en -1 , met (voor dit probleem irrelevante) eigenruimten $E_1 = \langle (3, 4)^t \rangle$ en $E_{-1} = \langle (2, 3)^T \rangle$, dus de 100-e macht heeft dezelfde eigenruimten, maar beide met eigenwaarde 1, en is dus de identiteitsmatrix.
5. a) Laat $\lambda_u \neq \lambda_v$ de eigenwaarden zijn, en stel dat $x\underline{u} + y\underline{v} = \underline{0}$, dan geldt na vermenigvuldiging met A dat ook $x\lambda_u\underline{u} + y\lambda_v\underline{v} = \underline{0}$. Een geschikte combinatie levert nu dat $x(\lambda_u - \lambda_v)\underline{u} = \underline{0}$, en dus $x = 0$ en evenzo $y = 0$, dus ze zijn onafhankelijk.
- b) Er geldt: $\lambda_u\underline{u}^T \underline{v} = \underline{u}^T A^T \underline{v} = \underline{u}^T A \underline{v} = \lambda_v \underline{u}^T \underline{v}$, en dus is het inproduct $\underline{u}^T \underline{v} = 0$.