

Lineaire Algebra voor N (2DN12)

Derde tussentoets, juni 2010

- 1) Zij A de lineaire afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ (de ruimte van reële polynomen van graad ten hoogste 2) naar $\mathbb{R}^4$ gedefinieerd door $Ap = (p(1), p(2), p(3), p(4))$.
- a) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis $1, x, x^2$ van $P_2(\mathbb{R})$ en de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$.
 - b) Bepaal $\dim R(A)$.

- 2) Voor elke $a \in \mathbb{R}$ is de reële matrix

$$M_a := \begin{bmatrix} 2 & 1+a \\ 0 & 1+a^2 \end{bmatrix}$$

gegeven.

- a) Bepaal de eigenwaarden van M_a (als functie van a).
 - b) Voor welke waarden van a is M_a diagonaliseerbaar?
- 3) Bekijk de K kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven door $41x^2 - 24xy + 34y^2 = 25$.
- a) Bepaal een orthogonale matrix P zo dat in de coördinaten u, v gegeven door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

de kromme K geven wordt door $u^2 + 2v^2 = 1$.

- b) Bepaal de (x, y) -coördinaten van de punten op K die het dichtst bij de oorsprong liggen.
- 4) Bepaal de 100-ste macht van de matrix

$$\begin{bmatrix} 17 & -12 \\ 24 & -17 \end{bmatrix}$$

- 5) Laat $\underline{u}, \underline{v}$ eigenvectoren van een reële vierkante matrix A zijn bij twee *verschillende* eigenwaarden.
- a) Bewijs dat $\underline{u}, \underline{v}$ lineair onafhankelijk zijn.
 - b) Neem aan dat A symmetrisch is. Bewijs dan dat $\underline{u}, \underline{v}$ loodrecht op elkaar staan.

Elke opgave is goed voor 2 punten.