

Opgaven uit oude tentamens Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

1. De afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 1, 0) &= (2, 1, -1), \\ \mathcal{A}(1, 0, 2) &= (5, 6, 7), \\ \mathcal{A}(0, 1, 1) &= (0, -2, -2).\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de matrix van de afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis.
 - (b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van $\mathcal{A}$.
2. Stel A en B zijn reële $n \times n$ matrices.

Bewijs of weerleg de volgende beweringen.

- (a) Als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ orthogonaal zijn, dan is $\mathcal{A}\mathcal{B}$ dat ook.
 - (b) Als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ symmetrisch zijn, dan is $\mathcal{A}\mathcal{B}$ dat ook.
3. De afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 1, 0) &= (8, 2, 5), \\ \mathcal{A}(1, 0, 1) &= (4, 4, 6), \\ \mathcal{A}(0, 1, 1) &= (2, 2, 3).\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de matrix van de afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis.
 - (b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van $\mathcal{A}$.
 - (c) Bepaal alle vectoren $x \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt dat $\mathcal{A}(x) = (7, 4, 7)$.
4. Een afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heet orthogonaal als voor alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ geldt dat $\langle \mathcal{A}v, \mathcal{A}w \rangle = \langle v, w \rangle$.

Voor de orthogonale afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ geldt:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 0, 0) &= (1/3, 2/3, 2/3); \\ \mathcal{A}(0, 1, -1) &= (0, -1, 1);\end{aligned}$$

- (a) Toon aan dat het vlak $x_2 - x_3 = 0$ invariant is onder $\mathcal{A}$. (Invariant wil zeggen: als v een vector in het vlak is, dan is $\mathcal{A}v$ dat ook.)
- (b) Laat zien dat $\mathcal{A}(0, 1, 1) = \pm(-4/3, 1/3, 1/3)$.
- (c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis, als verder gegeven is dat $\det(\mathcal{A}) = -1$.

5. In $\mathbb{R}^2$ wordt de ellips K beschreven door de vergelijking

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 30.$$

Welke punten (in (x_1, x_2) -coördinaten) van K liggen op minimale afstand van de oorsprong $(0, 0)$?

6. Zij V een reële vectorruimte. Stel $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van V naar V .

Bewijs of weerleg de volgende beweringen.

- (a) Als $v \in V$ een eigenvector van $\mathcal{A}$ is, dan is v ook een eigenvector van $\mathcal{A}^2$.
- (b) Als $v \in V$ een eigenvector van $\mathcal{A}^2$ is, dan is v ook een eigenvector van $\mathcal{A}$.