

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

27 augustus 2009

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het eindcijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 1 op te tellen, het resultaat door 4 te delen en af te ronden.

Onderdeel	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5a	5b
Aantal punten	4	3	1	4	3	6	4	2	2	3	2	2	3

1. Zij D het kwadratische oppervlak in $\mathbb{R}^4$ gegeven door

$$D := \{(a, b, c, d) \mid ad - bc = 1\}.$$

- (a) Bepaal een orthogonale matrix P zo dat in coördinaten x, y, u, v gegeven door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

de vergelijking voor D luidt: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 = 1$.

- (b) Wat is de minimale waarde van $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ over alle reële matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

met determinant 1? Voor welke matrices wordt deze minimale waarde aangenomen?

2. Bekijk voor complexe getallen a_0, a_1, a_2 de matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

(een zogeheten *companion matrix*).

- (a) Bepaal het karakteristieke polynoom $p(t) = \det(tI - A)$ van A (dit is dus een polynoom van graad 3 in t waarvan de coëfficiënten afhangen van de getallen a_0, a_1, a_2 ; u hoeft *niet* de nulpunten van dit polynoom als functie van a_0, a_1, a_2 te bepalen).

- (b) Neem aan dat we een nulpunt $\lambda \in \mathbb{C}$ van p kennen. Bepaal een eigenvector van A bij eigenwaarde λ en bewijs dat de eigenruimte bij λ precies 1-dimensionaal is.
- (c) Neem aan dat p *niet* drie verschillende nulpunten heeft. Is A dan diagonaliseerbaar? En hoe zit dat als p *wel* drie verschillende nulpunten heeft?

3. Bekijk het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen $\underline{x}' = A\underline{x}$ met

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ en } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Vind de algemene *reële* oplossing van dit stelsel.
 - (b) Vind een oplossing van het *nieuwe* stelsel $\underline{x}' = A^{2009}\underline{x}$ die voldoet aan de beginvoorwaarde $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$. (Hint: slechts één eigenvector van A^{2009} blijkt nodig.)
4. Bekijk de polynomen p_{-1}, p_0, p_1 in de ruimte $P_2(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad hooguit 2 gedefinieerd door

$$p_{-1}(x) := x(x-1)/2, \quad p_0(x) := -(x+1)(x-1), \quad p_1 := (x+1)x/2.$$

- (a) Bewijs dat p_{-1}, p_0, p_1 een basis van $P_2(\mathbb{R})$ vormen.

Zij $A : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $(Aq)(x) = q(-x)$, zodat bijvoorbeeld $A(x^2 - x + 1) = x^2 + x + 1$.

- (b) Bewijs dat A lineair is.
 - (c) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis p_{-1}, p_0, p_1 .
 - (d) Zij $S : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de afbeelding gedefinieerd door $S(q) := (q(-1), q(0), q(1))$ en zij $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ de afbeelding gedefinieerd door $T(a, b, c) = ap_{-1} + bp_0 + cp_1$. Laat zien dat T en S elkaars inverse zijn.
5. Laat A en B lineaire afbeeldingen van een vectorruimte V naar zichzelf zijn die voldoen aan $A^2 - 2A + I = B^2 + 2B + I = 0$ en $AB = BA$; hier zijn $I, 0 : V \rightarrow V$ respectievelijk de identiteitsafbeelding en de nulafbeelding en staat AB voor de samenstelling van A en B , etc.
- (a) Laat zien dat $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = 0$.
 - (b) Bepaal alle eigenwaarden van $A + B$.