

Uitwerkingen Lineaire Afbeeldingen Augustus 2008

Opgave 1

$f1[x_] := \text{Cos}[x]; f2[x_] := \text{Sin}[x]; f3[x_] := x \text{Cos}[x]; f4[x_] := x \text{Sin}[x];$

■ Onderdeel a.

Het volgende commando rekent elk van de functies uit in de punten $0, \pi, \pi/2, -\pi/2$; dus de eerste rij correspondeert met $f1$, de eerste kolom met 0 , etc.

$\text{Outer}[\#1[\#2] \&, \{f1, f2, f3, f4\}, \{0, \pi, \pi/2, -\pi/2\}]$

$\left\{ \{1, -1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, -1\}, \{0, -\pi, 0, 0\}, \left\{0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \right\}$

Deze vier rijvectoren zijn lineair onafhankelijk, dus zijn $f1, \dots, f4$ het ook.

■ Onderdeel b.

Standaard.

■ Onderdeel c.

$DD = \{\{0, 1, 1, 0\}, \{-1, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, -1, 0\}\};$

$\text{Eigensystem}[DD]$

$\{\{i, i, -i, -i\}, \{-i, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{i, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}$

Dus de eigenwaarden zijn i en $-i$, beide met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1 (*Mathematica* zegt dit door $\{0,0,0,0\}$ als eigenvector te geven---onzin natuurlijk). Eigenvectoren: $-if1 + f2$ resp. $if1+f2$.

■ Onderdeel d.

Nee, want de algebraïsche multipliciteit van bijvoorbeeld i is niet de meetkundige multipliciteit.

Opgave 2.

■ Onderdeel a.

$A = \{\{1/2, 1/10\}, \{1/2, 9/10\}\};$

$EE = \text{Eigensystem}[A]$

$\left\{ \left\{1, \frac{2}{5}\right\}, \left\{\left\{\frac{1}{5}, 1\right\}, \{-1, 1\}\right\} \right\}$

```
P = Transpose[EE[[2]]]; DD = DiagonalMatrix[EE[[1]]];
```

Check:

```
P.DD.Inverse[P]
```

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{10} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{9}{10} \right\} \right\}$$

Nu geldt natuurlijk: $A^n = P.DD^n.P$, dus bekijk:

```
P.MatrixPower[DD, n].Inverse[P] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} & \frac{1}{6} - \frac{1}{3} 2^{-1+n} 5^{-n} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} & \frac{5}{6} + \frac{1}{3} 2^{-1+n} 5^{-n} \end{pmatrix}$$

Als n naar oneindig gaat, convergeert deze matrix naar de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

■ Onderdeel b.

Op dag n is de kansverdeling {kans op regen, kans op zon} gelijk aan $A \{p, 1-p\}^T$. Om dit uit te rekenen, schrijf $x_0 = \{p, 1-p\}^T$ als lineaire combinatie $c \cdot \{1/6, 5/6\} + d \cdot \{-1, 1\}$. Dan geldt $c=1$ omdat de som van de coördinaten 1 is (en d ligt tussen $-5/6$ en $1/6$). Maar nu geldt $A^n x_0 = \{1/6, 5/6\} + d \cdot \{-1, 1\} \cdot (2/5)^n$, en dit convergeert naar $\{1/6, 5/6\}$.

Opgave 3.

■ Onderdeel a.

```
A = {{1, 0, 0}, {0, 1/3, 2 Sqrt[2]/3}, {0, 2 Sqrt[2]/3, -1/3}};
```

```
Eigensystem[A]
```

$$\left\{ \{-1, 1, 1\}, \left\{ \left\{ 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right\}, \left\{ 0, \sqrt{2}, 1 \right\}, \{1, 0, 0\} \right\} \right\}$$

We kunnen dus bijvoorbeeld P gelijk nemen aan

```
P = {{1, 0, 0}, {0, Sqrt[2]/Sqrt[3], 1/Sqrt[3]},  
      {0, -1/Sqrt[3], Sqrt[2]/Sqrt[3]}} // Transpose;
```

Check:

```
Inverse[P].A.P
```

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, -1\}\}$$

```
P.Transpose[P]
```

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

Det [P]

1

■ Onderdeel b.

Vertaal het punt eerst naar (u,v,w)-coördinaten:

Inverse [P] . {0, 2 / Sqrt [3], Sqrt [2] / Sqrt [3]}

$$\{0, \sqrt{2}, 0\}$$

Dus we moeten kijken naar lijnen $\{at, \text{Sqrt}[2]+bt, ct\}$ die helemaal op $u^2+v^2-w^2=2$ liggen. Invullen en coëfficiënten van t en t^2 gelijkstellen levert $b=0$ en $a^2-c^2=0$, dus $a=\pm c$. De oplossingen zijn dus:

P. {t, Sqrt [2], t}

$$\left\{t, \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} t\right\}$$

en

P. {t, Sqrt [2], -t}

$$\left\{t, \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} t\right\}$$

Opgave 4.

■ Onderdeel a.

Als $Bw=0$, dan zeker $(AB)w=A(Bw)=A0=0$, dus $\ker B$ is bevat in $\ker AB$

■ Onderdeel b.

Als $ABv=cv$, bekijk dan $BABv$. Deze vector is niet nul, want BAB is injectief. En er geldt $BA(BABv)=(BAB)(ABv)=BAB(cv)=c(BABv)$. Dus $BABv$ is een eigenvector van BA bij eigenwaarde c .

■ Onderdeel c.

Neem bijvoorbeeld V =polynomen van graad hooguit 2, W =polynomen van graad hooguit 1, A =differentiëren, B =integreren vanuit 0. Dan geldt $BAB=BI=B$ en B is injectief, maar ABA zeker niet, want $ABA1=0$.

Opgave 5.

■ Onderdeel a.

$$A = \{\{-1, -1\}, \{1, -3\}\};$$

Eigensystem[A]

```
{{-2, -2}, {{1, 1}, {0, 0}}}
```

Oppassen geblazen! De eigenwaarde -2 heeft meetkundige multipliciteit. Dus iig is $\{1,1\}e^{(-2t)}$ een oplossing. Probeer nu een oplossing van de vorm $x=a e^{(-2t)}+b t e^{(-2t)}$. Differentieren geeft $(-2a+b)e^{(-2t)} -2bt e^{(-2t)}$, en dit moet gelijk zijn aan $(A.a)e^{(-2t)} + (A.b)te^{(-2t)}$. Dus blijkbaar willen we dat $A.b=-2b$, dus bijvoorbeeld $b=\{1,1\}$. De vergelijking voor $a=\{a_1,a_2\}$ wordt nu: $(-2-A)a=-\{1,1\}$. Dit geeft $a=\{1,0\}$. Dus een verdere oplossing is $\{1,0\}e^{(-2t)}+\{1,1\}te^{(-2t)}$. De algemene oplossing is opgespannen door deze twee fundamentele oplossingen. Check:

```
x = c {1, 1} Exp[-2 t] + d ({1, 0} Exp[-2 t] + {1, 1} t Exp[-2 t]);
```

```
D[x, t] - A.x // Simplify
```

```
{0, 0}
```

■ **Onderdeel b.**

```
D[x, t] /. {t -> 0}
```

```
{-2 c - d, -2 c + d}
```

Dus de oplossing is $c=-1$, $d=1$. Deze heeft beginpunt $x(0)=$

```
x /. {c -> -1, d -> 1, t -> 0}
```

```
{0, -1}
```