

# TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

7 augustus 2008

## Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het eindcijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 1 op te tellen, het resultaat door 4 te delen en af te ronden.

| Onderdeel     | 1a | 1b | 1c | 1d | 2a | 2b | 3a | 3b | 4a | 4b | 4c | 5a | 5b |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Aantal punten | 3  | 3  | 4  | 2  | 4  | 2  | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 2  |

1. Bekijk de complexe vectorruimte  $V$  van functies van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{C}$  die wordt opgespannen door de functies  $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ ,  $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ ,  $f_3 : x \mapsto x \cos(x)$ ,  $f_4 : x \mapsto x \sin(x)$ .

- (a) Laat zien dat de functies  $f_1, f_2, f_3, f_4$  lineair onafhankelijk zijn.  
(Hint: vul vier geschikte getallen in voor  $x$ .)

Zij  $D : V \rightarrow V$  de afbeelding die een functie  $f$  op zijn afgeleide  $f'$  afbeeldt.

- (b) Laat zien dat de matrix van  $D$  ten opzichte van de basis  $f_1, f_2, f_3, f_4$  gelijk is aan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (c) Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van  $D$ .
- (d) Is  $D$  diagonaliseerbaar?

2. In een land hier heel ver vandaan heerst het volgende weerpatroon, dat niet aan seizoenen onderhevig is: als het op een dag regent, dan is de kans 0.5 dat het de volgende dag weer regent, en 0.5 dat het droog blijft. Als het op een dag droog is, dan is de kans 0.9 dat het de volgende dag weer droog is, en 0.1 dat het de volgende dag regent.

- (a) Bereken de limiet voor  $n \rightarrow \infty$  van  $A^n$ , waarbij  $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$ .
- (b) Neem aan dat op dag 0 de kans op regen  $p$  is, met  $0 \leq p \leq 1$ , en de kans op zon  $1 - p$ . Beargumenteer dat de kans op regen op dag  $n$  voor  $n \rightarrow \infty$  convergeert naar een limiet die niet van  $p$  afhangt. Wat is die limietkans?

3. Beschouw het oppervlak  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}yz = 2\}$$

- (a) Bepaal een orthogonale  $3 \times 3$ -matrix  $P$  met determinant 1 zo dat in de coördinaten  $u, v, w$  bepaald door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

de vergelijking voor  $S$  luidt:  $u^2 + v^2 - w^2 = 2$ .

- (b) Door het punt  $(x, y, z) = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$  gaan twee rechte lijnen die geheel op  $S$  liggen. Bepaal parametervoorstellingen van deze twee rechte lijnen. (Hint: misschien eerst in  $u, v, w$ -coördinaten?)
4. Laat  $V, W$  eindigdimensionale vectorruimten zijn, en laat  $A : V \rightarrow W$  en  $B : W \rightarrow V$  lineaire afbeeldingen zijn. Ter herinnering: de afbeelding  $AB = A \circ B : W \rightarrow W$  is gedefinieerd door  $(AB)(w) = (A \circ B)(w) = A(Bw)$ .
- (a) Bewijs dat  $\dim \ker(AB) \geq \dim \ker(B)$ .
- (b) Als  $BAB$  injectief is (dus kern  $\{0\}$  heeft), dan is elke eigenwaarde van  $AB$  ook een eigenwaarde van  $BA$ . Bewijs dit.
- (c) Geef een voorbeeld waarbij  $BAB$  injectief is, maar  $ABA$  niet.
5. Bekijk het homogene stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen voor  $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \quad (*)$$

- (a) Geef de algemene oplossing van dit stelsel.
- (b) Bepaal  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  met de eigenschap dat de oplossing van (\*) met beginwaarde  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  voldoet aan

$$\underline{x}'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$