

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

9 augustus 2010

Tentamen Lineaire Algebra (2DN12).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Onderdeel	1	2a	2b	3	4a	4b	4c	5a	5b	5c	5d	6
Aantal punten	4	3	3	4	2	5	3	2	3	4	3	4

1. Zij $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ een onafhankelijk stelsel vectoren in een vectorruimte V . Bewijs dat $\underline{a} + 3\underline{b}, 2\underline{a} + \underline{b}, \mu\underline{a} + \underline{c}$ voor elke waarde van μ een onafhankelijk stelsel is.

2. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven het vlak

$$U = \{(x, y, z, u) \mid x + y + z + u = 0, y + z + 2u = 0\}.$$

(a) Bepaal een vectorvoorstelling van U .

(b) Bepaal de doorsnede van U met het vlak

$$V : \underline{x} = (1, 2, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 4, -1, 1).$$

3. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de lijnen $l : (2, 5, 3) + \lambda(2, 3, 4)$ en $m : (2, 2, 3) + \mu(1, 2, 3)$. Bepaal de afstand tussen l en m , en ook de punten op l en m waarvoor deze afstand gerealiseerd wordt.

4. Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Toon aan dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1)$.

(b) Bepaal de algemene *reële* oplossing van het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.

(c) Wat is de dimensie van de ruimte van oplossingen $\underline{x}$ die voor positieve t begrensd blijven (d.w.z. dat er een $B > 0$ is zo dat $\|\underline{x}(t)\| \leq B$ voor alle $t > 0$)?

5. Zij V de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $p(x)e^{3x}$ met $p(x)$ een polynoom van graad hooguit 3. Zij B de afbeelding van V naar V gedefinieerd door $Bf = f' - 3f$, waar f' de eerste afgeleide van f is.

- (a) Bewijs dat B een lineaire afbeelding is.
- (b) Bewijs dat de functies $x^i e^{3x}$, $i = 0, 1, 2, 3$ een basis van V vormen. (Hint: gebruik B .)

Zij A de lineaire afbeelding $V \rightarrow V$ gedefinieerd door $(Af)(x) = (x - 1) \cdot (Bf)(x)$.

- (c) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis bij (b).
 - (d) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A . (Let op: de eigenruimten worden opgespannen door functies, niet door kolomvectoren.)
6. Zij A een lineaire afbeelding van V naar V , en neem aan dat een zekere macht $A^k = A \circ \dots \circ A$ (de samenstelling van k keer A) met $k > 0$ de identiteitsafbeelding I op V is. Bewijs dat alle eigenwaarden van A absolute waarde 1 hebben.