

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

9 augustus 2010

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Onderdeel	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5
Aantal punten	4	2	3	3	2	2	5	3	2	3	4	3	4

1. Van een symmetrische 2×2 -matrix A is bekend dat $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector bij eigenwaarde 1 is en dat ook -1 een eigenwaarde is. Bepaal A .
2. Zij V de vectorruimte bestaande uit drietallen $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ met $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^2$. De optelling en scalaire vermenigvuldiging in V gaan componentsgewijs, dus bijvoorbeeld $((1, 2), (0, 1), (1, 2)) + ((2, 1), (4, 2), (-6, 1)) = ((3, 3), (4, 3), (-5, 3))$ en $2 \cdot ((1, 0), (0, -1), (0, 2)) = ((2, 0), (0, -2), (0, 4))$. Zij A de lineaire afbeelding van V naar V gegeven door

$$A(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \left(\frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2), \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3), \frac{1}{2}(\underline{v}_3 + \underline{v}_1) \right).$$

- (a) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis gegeven door $((1, 0), (0, 0), (0, 0)), ((0, 1), (0, 0), (0, 0)), ((0, 0), (1, 0), (0, 0)), ((0, 0), (0, 1), (0, 0)), ((0, 0), (0, 0), (1, 0))$.
- (b) Bepaal de eigenruimte E_1 van A bij eigenwaarde 1 (als deelruimte van V , niet als kolomvectoren).

Zij B de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die draaiing om de oorsprong over een hoek van $2\pi/3$ voorstelt, zodat B^3 de identiteit is.

- (c) Laat zien dat de deelruimte V_1 van V bestaande uit alle drietallen van de vorm $(\underline{v}, B\underline{v}, B^2\underline{v})$ invariant is onder A (dat wil zeggen: als een drietal in V_1 zit, dan zit het beeld ervan onder A ook in V_1).
- (d) Vindt nog een twee-dimensionale deelruimte V_2 van V , ongelijk aan V_1 en aan E_1 , die ook invariant is onder A .

Zie ommezijde!

3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - 1)$.
 - (b) Bepaal de algemene *reële* oplossing van het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$.
 - (c) Wat is de dimensie van de ruimte van oplossingen $\underline{x}$ die begrensd blijven voor positieve t (d.w.z. dat er een $B > 0$ is zo dat $\|\underline{x}(t)\| \leq B$ voor alle $t > 0$)?
4. Zij V de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $x \mapsto p(x)e^{3x}$ met p een polynoom van graad hooguit 3. Zij B de afbeelding van V naar V gedefinieerd door $Bf = f' - 3f$, waar f' de eerste afgeleide van f is.
- (a) Bewijs dat B een lineaire afbeelding is.
 - (b) Bewijs dat de functies $x \mapsto x^i e^{3x}$, $i = 0, 1, 2, 3$ een basis van V vormen. (Hint: je kunt hierbij B gebruiken.)

Zij A de lineaire afbeelding $V \rightarrow V$ gedefinieerd door $(Af)(x) = (x - 1) \cdot (Bf)(x)$.

- (c) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis bij (b).
 - (d) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A . (Let op: de eigenruimten worden opgespannen door functies, niet door kolomvectoren.)
5. Zij A een lineaire afbeelding van V naar V , en neem aan dat een zekere macht $A^k = A \circ \dots \circ A$ (de samenstelling van k keer A) met $k > 0$ de identiteitsafbeelding I op V is. Bewijs dat alle eigenwaarden van A absolute waarde 1 hebben.