

Lineaire algebra, maandag 22 april.

oud Vectorruimte: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\lambda \mathbf{u}$ en 10 regels.

Deelruimte: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\lambda \mathbf{u}$.

Basis: $V = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ en onafhankelijk.

abstract inproduct Een voorschrift dat aan elk paar vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ uit een (reële) vectorruimte V een scalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ toevoegt heet een (reëel) inproduct op V als :

$$(1) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle, \quad (\text{symmetrie}),$$

$$(2) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle, \quad (\text{som})$$

$$(3) \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad (\text{scalair veelvoud})$$

$$(4) \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \text{ en } = 0 \text{ alleen als } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Cauchy-Schwarz In een abstracte (reële) inproduct ruimte geldt dat

$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, met gelijkheid dan en slechts dan als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ lineair afhankelijk zijn.

Loodrecht, Pythagoras We zeggen dat $\mathbf{u}$ loodrecht staat op $\mathbf{v}$, en schrijven $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ als $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Min of meer per definitie geldt nu de stelling van Pythagoras: Als $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, dan is $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$. Meer algemeen definiëren we de hoek θ tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ door $\cos \theta = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|)$.

Orthogonaal Complement W deelruimte van een inproduct ruimte V .

Het orthogonaal complement (loodrecht complement, orthoplement, de loodrechte) $W^\perp$ is de verzameling vectoren die loodrecht staat op elke vector uit W .

$$(1) W^\perp \text{ is deelruimte. } (2) W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

$$\text{Als } V \text{ eindigdimensionaal: } (3) (W^\perp)^\perp = W. (4) V = W + W^\perp$$

Matrices A een $m \times n$ matrix. $V = \mathbb{R}^n$, $W \subset V$ de rijruimte van A , dan is $W^\perp$ de nulruimte van A . Om een basis te vinden van $W^\perp$ moeten we dus een stelsel vergelijkingen oplossen.

Vierkant A een $n \times n$ matrix, equivalent:

a. Inverteerbaar; b,c,...,p,q; r. De loodrechte van de nulruimte van A is $\mathbb{R}^n$; s. De loodrechte van de rijruimte van A is $\mathbf{0}$.

Orthonormale basis Voor de standaard basis van $\mathbb{R}^n$ geldt $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, en $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ als $i \neq j$. Een basis van een inproduct ruimte V met deze eigenschappen heet *orthonormaal*. Als $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een o.n. basis is van V en $\mathbf{u} \in V$, dan zijn de coördinaten van $\mathbf{u}$ eenvoudig te bepalen:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n.$$

Voor $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in V geldt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n$
en $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}_1^2 + \dots + \mathbf{x}_n^2)^{1/2}$, m.a.w. V is gewoon $\mathbb{R}^n$.

Projecties Als W een deelruimte is van een inproductruimte V , en W heeft een o.n. basis $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$, dan is de projectie van $\mathbf{v} \in V$ op W gelijk aan

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k.$$

Dus de coördinaten die je zou krijgen als je net doet alsof $\mathbf{v} \in W$. Voor de projectie op de loodrechte geldt: $\text{proj}_{W^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_W(\mathbf{v})$.

Gram-Schmidt Gegeven een inproduct V ruimte met basis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, een o.n.-basis $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ maak je als volgt: Stap 1: maak een hulpbasis van onderling loodrechte vectoren $\mathbf{v}_i$. Stap 2: $\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$.

Stap 1 gaat als volgt, voor $i = 1, 2, \dots, n$ is $\mathbf{v}_i$ de projectie van $\mathbf{u}_i$ op $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle^\perp$. Concreet:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Alternatief zonder hulpbasis:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|, & \mathbf{q}_2 &= (\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1) / \|\text{teller}\| \\ \mathbf{q}_3 &= (\mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2) / \|\text{teller}\|, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Kleinste kwadraten methode A een $m \times n$ matrix met rang m (dus $m \leq n$). De vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een oplossing als $\mathbf{b}$ in de kolomruimte (W) ligt van A . Als dat niet zo is kunnen we een benaderde oplossing vinden: $A\mathbf{x} = P_W(\mathbf{b})$. Dit heet de kleinste kwadraten oplossing. Er geldt $A^T P_W(\mathbf{b}) = A^T \mathbf{b}$, dus we lossen op $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ en omdat A rang m heeft is $A^T A$ inverteerbaar, en dus geldt voor de kleinste kwadraten oplossing: $\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. Hieruit vinden we ook de projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A : $\text{proj}_W(\mathbf{b}) = A(A^T A)^{-1} A^T(\mathbf{b})$.