

Lineaire algebra, maandag 15 april.

oud Vectorruimte: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{u}$ en 10 regels.

Deelruimte: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{u}$.

Lineaire combinatie: $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{u}_k$.

Opspannel $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$: alle lineaire combinaties.

Lineair (on)afhankelijk: $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \dots$

Basis: $V = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ en onafhankelijk.

Elke basis heeft evenveel elementen: $\dim(V)$ (kan oneindig zijn).

Standaard basis $\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ met de één op plaats i ($i = 1, \dots, n$).

matrices A een $m \times n$ matrix. De rijruimte is de deelruimte van $\mathbb{R}^n$ opgespannen door de rijen (rijvectoren) van A .

De kolomruimte is de deelruimte van $\mathbb{R}^m$ opgespannen door de kolommen.

De nulruimte is de deelruimte van $\mathbb{R}^n$ van vectoren $\mathbf{x}$ met $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

stelsels Het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een oplossing als $\mathbf{b}$ in de kolomruimte van A zit. De algemene oplossing is van de vorm $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ als de $\mathbf{v}$'s een basis van de nulruimte van A zijn. Hierbij is $\mathbf{x}_0$ een particuliere oplossing.

vegen Elementaire rijoperaties veranderen de nulruimte en de rijruimte niet. Onafhankelijke verzamelingen kolommen blijven onafhankelijk.

rang/nullity Rijrang: dimensie van de rijruimte; kolomrang: dimensie van de kolomruimte; 'nullity': dimensie van de nulruimte.

Rijrang = kolomrang: de rang van de matrix. De rang van A^T is de rang van A .

Rang + nullity = n (het aantal kolommen van A).

vierkant A een $n \times n$ matrix, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de lin. afb. $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Equivalent:

- Inverteerbaar;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen triviale opl.;
- $\text{rref}(A) = I_n$;
- A is product van elem. matrices;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft altijd oplossing;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft altijd precies één opl.;
- $\det(A) \neq 0$;
- Het bereik van T is $\mathbb{R}^n$;
- T is één-één.
- Kolommen van A zijn lin. onafh.
- Rijen van A onafh.
- Opspannel kolomvectoren is $\mathbb{R}^n$;
- Opspannel rijen is $\mathbb{R}^n$;
- Kolommen zijn basis;
- Rijen zijn basis;
- Rang is n ;
- Nullity is 0.

standaard inproduct In $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$.

Eigenschappen:

- (1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, (symmetrie),
- (2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle$, (som)
- (3) $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, (scalair veelvoud)
- (4) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ en $= 0$ alleen als $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

abstract inproduct Een voorschrift dat aan elk paar vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ uit een (reële) vectorruimte V een scalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ toevoegt heet een (reëel) inproduct op V als bovenstaande eigenschappen (1) tot en met (4) gelden.

voorbeelden Het gewogen inproduct op $\mathbb{R}^n$: Voor positieve getallen $d_1, \dots, d_n$, laat $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = d_1 u_1 v_1 + \cdots + d_n u_n v_n$.

Algemener: A een inverteerbare $n \times n$ matrix, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v}$.

Polynomen: $V = \mathbf{P}_n$, polynomen van graad hooguit n . Voor een rij van $n+1$ verschillende getallen $a_1, \dots, a_{n+1}$ laat $\langle f, g \rangle = f(a_1)g(a_1) + \cdots + f(a_{n+1})g(a_{n+1})$.

Fatsoenlijke functies: V een vectorruimte van 'fatsoenlijke' functies van $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, en definiëer $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Matrices: $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) (= \sum a_{ij} b_{ij})$.

Lengte en afstand We kunnen een abstract inproduct gebruiken om op V lengte en afstanden te definiëren: $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$, $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Voor deze afstand geldt de driehoeksongelijkheid: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, wat bewezen kan worden met de stelling van:

Cauchy-Schwarz In een abstracte (reële) inproduct ruimte geldt dat $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, met gelijkheid dan en slechts dan als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ lineair afhankelijk zijn.

Bewijs: Voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $\langle t\mathbf{u} - \mathbf{v}, t\mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq 0$. Links staat een kwadratische uitdrukking in t die voor elke waarde van t niet negatief is, dus de discriminant is groter gelijk 0, en alleen gelijk aan nul als er een waarde van t is waarvoor $t\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Loodrecht, Pythagoras We zeggen dat $\mathbf{u}$ loodrecht staat op $\mathbf{v}$, en schrijven $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ als $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Min of meer per definitie geldt nu de stelling van Pythagoras: Als $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, dan is $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.