

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.5, 8.6

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Laat A en C gelijkvormige matrices zijn (ter herinnering: d.w.z. er is een inverteerbare P met $A = PCP^{-1}$). Bewijs dat $\dim R(A) = \dim R(C)$.

Oplossing. We definiëren een lineaire afbeelding $T : R(C) \rightarrow R(A)$ door $Ty := Py$. Om te beginnen moeten we verifiëren dat Ty inderdaad in $R(A)$ ligt. Schrijf daartoe $y = Cx$ —dat kan want y zit in $R(C)$ en vervolgens $Py = PCx = PCP^{-1}Px = A(Px)$. Verder is T injectief (one-to-one), want als $Ty = 0$, dan volgt dat $Py = 0$ dus, omdat P inverteerbaar is, $y = 0$. Tenslotte is T surjectief, want als $z \in R(A)$, dan kun je z schrijven als Au , en dus $z = Au = PCP^{-1}u = Py$ met $y := CP^{-1}u \in R(C)$. $\square$

Opgave 0.2. Laat A een vierkante matrix zijn. Kun je $\dim \ker A$ aflezen uit het karakteristieke polynoom?

Oplossing. Soms wel, soms niet. Als dat polynoom bijvoorbeeld $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ is, dan weet je dat $\ker A$, wat hetzelfde is als de eigenruimte van A bij eigenwaarde 0, minstens 1-dimensionaal is, en hoogstens 2-dimensionaal (meetkundige multipliciteit is hooguit algebraïsche multipliciteit). In het algemeen: als de algebraïsche multipliciteit 0 nul of 1 is, dan is de kern respectievelijk precies 0 of 1-dimensionaal. Anders kun je alleen een grens geven. $\square$