

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.1,8.2,8.3,8.4

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Als $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is, dan schrijven we T^2 voor $T \circ T$, T^3 voor $T \circ T \circ T$, enzovoorts. Bewijs dat $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \dots$ en $R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq R(T^3) \supseteq \dots$. Kun je een voorbeeld van een oneindigdimensionale vectorruimte V en een lineaire afbeelding T geven, waarvoor $\ker T^i \neq \ker T^{i+1}$ voor alle i ?

Oplossing. Als $T^i \underline{v} = 0$, dan geldt zeker dat $(T^{i+1})\underline{v} = T(T^i \underline{v}) = T0 = 0$. Dit laat zien dat $\ker T^i$ bevat is in $\ker T^{i+1}$. Omgekeerd is elk element van de vorm $T^{i+1} \underline{v}$ in het bijzonder van de vorm $T^i(T \underline{v}) = T^i \underline{w}$ met $\underline{w} := T \underline{v}$. Dus $R(T^{i+1})$ is bevat in $R(T^i)$. Voor de laatste vraag: je kunt bijvoorbeeld voor V de ruimte van alle reële polynomen nemen, en voor T de afbeelding die f afbeeldt op zijn afgeleide f' . Dan bestaat $\ker T^i$ uit alle polynomen van graad hooguit $i - 1$, en dus zit bijvoorbeeld x^i wel in $\ker T^{i+1}$ maar niet in $\ker T^i$. $\square$

Opgave 0.2. Stel een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow V$ voldoet aan $(A + I)^2 = 0$. Laat zien dat A inverteerbaar is.

Oplossing. Er geldt $A \circ A + 2A + I = 0$, dus $A(-A - 2I) = I$, dus $-A - 2I$ is de inverse van A . (Extra opgave: laat zien dat -1 de enige eigenwaarde van A is. Daaruit volgt ook dat A inverteerbaar is!) $\square$

Opgave 0.3. Als V een reële vectorruimte is en $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ een basis van V , laat zien dat de afbeelding $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \mapsto [\underline{v}]_B$, die aan $\underline{v}$ zijn coefficientvector ten opzichte van B toevoegt, een inverteerbare lineaire afbeelding is.

(Flauw.)

Opgave 0.4. (Moeilijk.) Neem aan dat S, T lineaire afbeeldingen $V \rightarrow V$ zijn, waarbij V een reële vectorruimte van oneven dimensie is. Laat zien dat er een vector $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq 0$ bestaat waarvoor $\{S\underline{v}, T\underline{v}\}$ lineair afhankelijk is.

Oplossing. Als $\underline{v}$ een niet-nul vector in $\ker S$ is, dan voldoet $\underline{v}$ meteen. Anders bekijk (een matrix van) $S^{-1} \circ T$. Omdat de dimensie oneven is, heeft deze afbeelding een reële eigenwaarde λ met bijbehorende eigenvector $\underline{v}$. Dan geldt $S^{-1}T\underline{v} = \lambda\underline{v}$, dus $T\underline{v} = \lambda S\underline{v}$, klaar. $\square$