

EXTRA OPGAVEN VOOR 7.3, 9.6, EN 9.7

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Geef een direct bewijs van de volgende uitspraak: als A een symmetrische matrix is, en $\underline{u}, \underline{v}$ zijn eigenvectoren van A bij verschillende eigenwaarden, dan staan $\underline{u}$ en $\underline{v}$ loodrecht op elkaar. (Hint: bereken $\underline{u}^T A \underline{v}$ op twee verschillende manieren.)

Oplossing. Er geldt $\underline{u}^T A \underline{v} = \underline{u}^T \lambda \underline{v} = \lambda(\underline{u}^T \underline{v})$, waarbij λ de eigenwaarde van A bij $\underline{v}$ is. Aan de andere kant geldt ook: $\underline{u}^T A \underline{v} = \underline{v}^T A^T \underline{u} = \underline{v}^T A \underline{u} = \underline{v}^T \mu \underline{u} = \mu(\underline{u}^T \underline{v})$, waar μ de eigenwaarde bij $\underline{u}$ is; in de tweede stap hebben we gebruikt dat A symmetrisch is. Dus er geldt $(\lambda - \mu)(\underline{u}^T \underline{v}) = 0$ en omdat $\lambda \neq \mu$, moet $\underline{u}$ loodrecht op $\underline{v}$ staan. $\square$

Opgave 0.2. Als A een *anti-symmetrische* matrix (d.w.z. dat $A^T = -A$), dan geldt $\underline{x}^T A \underline{x} = 0$ voor alle $\underline{x}$. Bewijs dit.

Oplossing. Er geldt

$$\underline{x}^T A \underline{x} = (\underline{x}^T A \underline{x})^T = \underline{x}^T A^T \underline{x} = -\underline{x}^T A \underline{x}$$

en dus $\underline{x}^T A \underline{x} = 0$. $\square$

Opgave 0.3. Bewijs of weerleg: $\{0\}, \langle \underline{e}_1 \rangle, \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle, \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ zijn de enige vier deelruimten van $\mathbb{R}^3$ die invariant zijn onder de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oplossing. Dat is waar. Zij U een deelruimte van $\mathbb{R}^3$ die invariant is onder B . Dan is die ook invariant onder $A := B - I$. Deze lineaire afbeelding beeldt $\underline{e}_3$ af op $\underline{e}_2$, $\underline{e}_2$ af op $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_1$ af op 0 . Dus als U een vector $u = a\underline{e}_1 + b\underline{e}_2 + c\underline{e}_3$ bevat met $c \neq 0$, dan bevat hij ook $A^2 u = \underline{e}_1$ en ook $Au - b\underline{e}_1 = \underline{e}_2$, en ook $u - a\underline{e}_1 - b\underline{e}_2 = \underline{e}_3$, en dan is $U = \mathbb{R}^3$. Anders, als U een vector van de vorm $a\underline{e}_1 + b\underline{e}_2$ bevat, dan volgt dat $U = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$, etc. $\square$

Opgave 0.4. Bekijk de kromme K in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 1.$$

Wat voor kromme is dit? Vind de punten op K die het dichtst bij de oorsprong liggen.

(Rekenen.)