

EXTRA OPGAVEN VOOR 7.1 EN 7.2

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Als A een reële vierkante matrix is en $\underline{v}$ een complexe eigenvector bij eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{C}$, dan is $\overline{\underline{v}}$ een eigenvector bij eigenwaarde $\overline{\lambda}$. Bewijs dit.

Oplossing. Rekenregels voor complex conjugereren: $\overline{\overline{xy}} = xy$ en $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$. Uit $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ volgt, door aan beide kanten complex te conjugereren, dat

$$\overline{A\underline{v}} = \overline{\lambda\underline{v}}.$$

Met de rekenregels herleiden we de rechterkant tot $\overline{\lambda}\overline{\underline{v}}$ en de linkerkant tot $\overline{A}\overline{\underline{v}}$, wat gelijk is aan $A\overline{\underline{v}}$ omdat A reëel is. Dus inderdaad geldt $A\overline{\underline{v}} = \overline{\lambda}\overline{\underline{v}}$, d.w.z. $\overline{\underline{v}}$ is een eigenvector van A bij eigenwaarde $\overline{\lambda}$. $\square$

Opgave 0.2. Bekijk de rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ gedefinieerd door $a_0 = 0, a_1 = 1$ en $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n$. Vind een eenvoudige formule voor a_n .

(Diagonaliseer een geschikte matrix.)

Opgave 0.3. Laat zien dat elke reële 3×3 -matrix een reële eigenwaarde heeft.

Oplossing. Het reële derde-graads polynoom $\det(\lambda I - A)$, waar A de reële 3×3 -matrix is, convergeert naar $-\infty$ voor $\lambda \rightarrow -\infty$ en naar $+\infty$ voor $\lambda \rightarrow +\infty$. Volgens de “tussenwaardestelling” heeft het dus ergens een nulpunt. Dat nulpunt is een eigenwaarde van A . $\square$

Opgave 0.4. Druk de coëfficiënt van λ^0 in het karakteristieke polynoom $\det(\lambda I - A)$ uit in A . Doe hetzelfde met de coëfficiënt van λ^{n-1} .

Oplossing. De constante coëfficiënt van een polynoom krijg je door 0 in te vullen. In dit geval dus $\det(0I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$, waar n de afmeting de vierkante matrix A is.

Voor λ^{n-1} ligt het een beetje lastiger. Ontwikkel $\det(\lambda I - A)$ bijvoorbeeld naar de eerste kolom. Dan krijg je

$$(\lambda - a_{11})D_1 - a_{21}D_2 + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}D_n$$

waarbij de $D_1, \dots, D_n$ determinanten van bepaalde $(n-1) \times (n-1)$ -deelmatrices van A zijn. In $D_2, \dots, D_n$ komen telkens maar $n-2$ entrees met λ erin voor, dus die dragen niet bij aan de coëfficiënt van λ^{n-1} .

Dus die coëfficiënt is gelijk aan de coëfficiënt van λ^{n-2} in D_1 minus a_{11} maal de coëfficiënt van λ^{n-1} in D_1 . Die laatste coëfficiënt is 1, en het bepalen van de coëfficiënt van λ^{n-2} in D_1 gaat weer op dezelfde manier. Conclusie: het antwoord is $-a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn} = -\text{tr}(A)$. $\square$

Opgave 0.5. Bewijs het volgende: als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ eigenvectoren zijn van een matrix A bij *verschillende* eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dan zijn de $\underline{v}_i$ lineair onafhankelijk.

Oplossing. Neem aan dat ze *niet* lineair onafhankelijk zijn. Dan bestaat er een lineaire relatie $a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k = 0$ waarbij niet alle a_i nul zijn. Kies zo'n combinatie waarbij zo *veel mogelijk* van de a_i nul zijn (maar niet allemaal). Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $a_1 \neq 0$. Laat nu A op de relatie los, en je vindt een andere relatie: $a_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \lambda_k \underline{v}_k = 0$. Trek nu λ_1 maal de eerste relatie van de laatste af, en je vindt

$$0 \underline{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) a_2 \underline{v}_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1) a_k \underline{v}_k = 0.$$

In deze relatie zijn meer coëfficiënten nul dan in de oorspronkelijke relatie (want de coëfficiënt van $\underline{v}_1$ is nul geworden), dus moeten ze volgens de aanname allemaal nul zijn. Maar omdat $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ allemaal verschillend zijn van λ_1 volgt dan dat $a_2 = \dots = a_k = 0$. Maar dan is $a_1 \underline{v}_1 = 0$ en dus $\underline{v}_1 = 0$, maar een eigenvector is per definitie niet nul—een tegenspraak. Dus de aanname was fout, en $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ zijn lineair onafhankelijk. $\square$