

EXTRA OPGAVEN VOOR 6.5 EN 6.6—OPLOSSINGEN

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Bewijs dat als A en B orthogonale $n \times n$ -matrices zijn, ook AB en A^{-1} orthogonale $n \times n$ -matrices zijn.

Oplossing. (Andere oplossingen, bijvoorbeeld gebruikmakend van $\|Ax\| = \|x\|$ voor orthogonale matrices, zijn ook mogelijk!) Omdat A en B orthogonaal zijn, geldt $A^T A = I$ en $B^T B = I$. Dus geldt

$$(AB)^T(AB) = (B^T A^T)(AB) = B^T(A^T A)B = B^T I B = B^T B = I,$$

en zodoende is ook AB orthogonaal. Uit $A^T A = I$ volgt dat A^T de inverse van A is, en dat ook geldt $AA^T = I$. Nu geldt

$$(A^{-1})^T(A^{-1}) = (A^T)^T A^T = AA^T = I,$$

dus A^{-1} is ook orthogonaal. $\square$

Opgave 0.2. Zij V een reële 2-dimensionale inproductruimte (d.w.z. een vectorruimte met inproduct). Neem aan dat $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ en $B' = \{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2\}$ orthonormale bases van V zijn. Laat zien dat de overgangsmatrix $P_{B,B'}$ van B' naar B orthogonaal is.

Oplossing. Zij

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

die matrix. Dus er geldt $\underline{v}'_1 = a\underline{v}_1 + c\underline{v}_2$ en $\underline{v}'_2 = b\underline{v}_1 + d\underline{v}_2$. Omdat B' orthonormaal is, geldt:

$$1 = \langle \underline{v}'_1, \underline{v}'_1 \rangle = \langle a\underline{v}_1 + c\underline{v}_2, a\underline{v}_1 + c\underline{v}_2 \rangle = a^2 + c^2$$

waarbij we in de laatste gebruikt hebben dat B orthonormaal is. Dus de eerste kolom van $P_{B,B'}$ heeft lengte 1. Op dezelfde manier vinden we dat de tweede kolom dat ook heeft. En verder geldt:

$$0 = \langle \underline{v}'_1, \underline{v}'_2 \rangle = \langle a\underline{v}_1 + c\underline{v}_2, b\underline{v}_1 + d\underline{v}_2 \rangle = ab + cd,$$

dus de kolommen van $P_{B,B'}$ staan loodrecht op elkaar. We concluderen dat de matrix inderdaad orthogonaal is. $\square$