

Lineaire Afbeelding
Stelsels differentiaalvergelijkingen

6 juni 2006

Inhoudsopgave

1	Stelsels differentiaalvergelijkingen	2
2	Opgaven	11

1 Stelsels differentiaalvergelijkingen

1.1 In deze paragraaf passen we onze kennis van eigenwaarden en eigenvectoren toe op stelsels differentiaalvergelijkingen. De hierin voorkomende functies zijn functies van een reële variabele t . We zullen afgeleiden aangeven zowel met een punt boven het functiesymbool als met een accent, dus bijvoorbeeld als $\dot{x}$ of als x' . De methoden

Het eenvoudigste geval van een stelsel van één vergelijking met één onbekende functie heb je vast al eerder ontmoet. Zo'n stelsel ziet er uit als

$$\dot{x} = ax + f$$

waarin x en f complexwaardige functies van de reële variabele t zijn en a een (complexe) constante. We kunnen dit stelsel bijvoorbeeld met de methode van de integrerende factor oplossen en vinden dan

$$x(t) = ce^{at} + p(t), \quad c \in \mathbb{C}$$

waarin $\langle e^{at} \rangle$ de verzameling van alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking is en $p(t)$ een particuliere oplossing. Als de functie $f(t)$ een e -macht maal een polynoom is, dan is de functie $p(t)$ diezelfde e -macht maal een (ander) polynoom.

We bespreken nu eerst een zeer eenvoudig stelsel van drie eerste orde vergelijkingen in drie onbekende functies $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$.

1.2 Voorbeeld. Ieder van deze drie vergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + e^t, \\ \dot{y} &= -y, \\ \dot{z} &= 3z + te^{3t}.\end{aligned}$$

is zelfstandig, zonder gebruik te maken van de overige vergelijkingen, op te lossen. Een dergelijk stelsel heet wel een *ontkoppeld stelsel*. We vinden

$$x = c_1 e^{2t} - e^t, \quad y = c_2 e^{-t}, \quad z = c_3 e^{3t} + \frac{1}{2} t^2 e^{3t}.$$

We kunnen deze oplossing ook in matrixvorm schrijven: $\underline{x} =$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 e^{3t}.$$

In de regel zullen we de oplossingen van een stelsel differentiaalvergelijkingen in deze vorm vinden.

1.3 Voorbeeld. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + e^t, \\ \dot{y} &= 12x - y + 2e^t.\end{aligned}$$

Dit stelsel kan ook in matrixvorm geschreven worden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.$$

We proberen de coëfficiëntenmatrix A op een diagonaalvorm te brengen. Daarvoor hebben we een basis van eigenvectoren nodig. De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 12 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = 0.$$

Er zijn dus twee reële eigenwaarden, 5 en -5 . We vinden $E_5 = \langle (1, 2) \rangle$ en $E_{-5} = \langle (-1, 3) \rangle$. Neem als basis $\alpha = ((1, 2), (-1, 3))$. Dan is

$$[\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad [\text{id}]_{\alpha, \varepsilon} = [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

zodat

$$[A]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

We voeren nu de coördinatentransformatie naar de basis α uit. Dus stel

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = [\text{id}]_{\alpha, \varepsilon} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x + y \\ -2x + y \end{pmatrix}.$$

Dan is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'$ en het stelsel gaat dus over in

$$[\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = A [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.$$

Linksvermenigvuldiging met $[\text{id}]_{\alpha, \varepsilon}$ levert

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' &= [\text{id}]_{\alpha, \varepsilon} A [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + [\text{id}]_{\alpha, \varepsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.\end{aligned}$$

Dit is een ontkoppeld stelsel:

$$u' = 5u + e^t, v' = -5v,$$

waarvan we de oplossing direct vinden:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

Linksvermenigvuldiging met $[\text{id}]_{\varepsilon, \alpha}$ levert nu

$$[\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} - \frac{1}{4} [\text{id}]_{\varepsilon, \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t,$$

zodat

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-5t} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.$$

Merk op dat de “vectorcoëfficiënten” van e^{5t} en e^{-5t} juist de eigenvectoren bij 5 en -5 zijn.

1.4 Definitie. Een stelsel van n lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten in n onbekende functies $x_1, \dots, x_n$ van de reële variabele t heeft de gedaante

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

waarin A een $n \times n$ matrix is en $f_1, \dots, f_n$ functies van t . Het stelsel heet *homogeen* als $(f_1, \dots, f_n) = (0, \dots, 0)$ en anders *inhomogeen*.

1.5 Het oplossen van zo'n stelsel is in feite weer het oplossen van een vectorvergelijking $\mathcal{B}\underline{x} = \underline{f}$ waarin $\mathcal{B} : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is. Dat is eenvoudig in te zien. Laat V bestaan uit rijtjes van n functies $x_1, \dots, x_n$ gedefinieerd op $\mathbb{R}$. Gemakshalve nemen we aan dat al deze functies net zo vaak gedifferentieerd kunnen worden als we willen.

We zien dan eenvoudig in dat V een (complexe) vectorruimte is. Voor iedere vector $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V$ definiëren we

$$\mathcal{A}\underline{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{D}\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A} : V \rightarrow V$ en $\mathcal{D} : V \rightarrow V$ zijn dan lineaire afbeeldingen, en het stelsel differentiaalvergelijkingen kan geschreven worden als

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} .$$

Alle oplossingen van dit stelsel vinden we dus door bij één particuliere oplossing alle vectoren van de nulruimte op te tellen, dus door bij één particuliere oplossing alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking te tellen.

Het oplossen van een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen gebeurt in de regel in drie stappen: eerst zoeken we alle oplossingen van het homogene stelsel, daarna zoeken we één particuliere oplossing en dan tellen we op.

1.6 We bespreken eerst het oplossen van het homogene stelsel

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ of in vectorvorm } \underline{x}' = A\underline{x} .$$

Als de matrix A op een diagonaalvorm gebracht kan worden, dan kunnen we het stelsel ontkoppelen net zo als we dat in voorbeeld 1.3 gedaan hebben. We lossen het zo verkregen stelsel op en transformeren terug. We vinden zo alle oplossingen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} ,$$

d.w.z.

$$\underline{x} = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \underline{v}_n e^{\lambda_n t} ,$$

waarin $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ een basis van eigenvectoren van A (voor $\mathbb{C}^n$) is met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1.7 Voorbeeld. Beschouw het homogene stelsel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

De matrix heeft eigenwaarden $1, i$ en $-i$ en we vinden $E_1 = \langle (2, 1, 1) \rangle$, $E_i = \langle (10 - 5i, 4 - 3i, 5) \rangle$ en $E_{-i} = \langle (10 + 5i, 4 + 3i, 5) \rangle$. Alle oplossingen zijn dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 10 - 5i \\ 4 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{it} + c_3 \begin{pmatrix} 10 + 5i \\ 4 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-it}$$

met $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Als we alle reële oplossingen willen hebben, dan moeten we de laatste twee termen wat anders schrijven. Noem $\underline{a} = (10 - 5i, 4 - 3i, 5)e^{it}$ en $\underline{b} = (10 + 5i, 4 + 3i, 5)e^{-it}$. Dan is $\underline{b}$ (rekentechnisch) de geconjugeerde van $\underline{a}$. Hieruit volgt dat

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}), \frac{1}{2i}(\underline{a} - \underline{b}) \rangle = \langle \text{Re}(\underline{a}), \text{Im}(\underline{a}) \rangle .$$

Dus zijn alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 10 \cos t + 5 \sin t \\ 4 \cos t + 3 \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \cos t + 10 \sin t \\ -3 \cos t + 4 \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}$$

waarin nog steeds $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Voor de reële oplossingen nemen we nu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1.8 Beschouw een homogeen lineair stelsel, in vectornotatie

$$\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} .$$

De bovenstaande oplossingsmethode werkt als er een basis van eigenvectoren bestaat, en dat is in een complexe vectorruimte in de regel het geval. We gaan nu in op wat we kunnen doen als er geen basis van eigenvectoren bestaat. We beperken ons tot de eenvoudigste situatie: de karakteristieke vergelijking heeft een nulpunt α met multipliciteit 2, maar de bijbehorende eigenruimte heeft dimensie 1.

In dat geval zoeken we oplossingen van de gedaante

$$\underline{x} = (\underline{u}t + \underline{v})e^{\alpha t} .$$

Invullen geeft

$$(\alpha \underline{u}t + \alpha \underline{v} + \underline{u})e^{\alpha t} = (\mathcal{A}\underline{u}t + \mathcal{A}\underline{v})e^{\alpha t} ,$$

waaruit volgt

$$\alpha \underline{u} = \mathcal{A}\underline{u} \quad \text{en} \quad \alpha \underline{v} + \underline{u} = \mathcal{A}\underline{v} .$$

Eén oplossing zien we zo: neem $\underline{u} = \underline{0}$ en $\underline{v}$ een eigenvector met eigenwaarde α .

Echter, er is ook een oplossing met $\underline{u} \neq \underline{0}$. Omdat de dimensie van de eigenruimte kleiner is dan de multipliciteit van de eigenwaarde bestaan er vectoren $\underline{u} \neq \underline{0}, \underline{v} \neq \underline{0}$ zo dat $(\mathcal{A} - \alpha I)\underline{v} = \underline{u} (\neq \underline{0})$ en $(\mathcal{A} - \alpha I)\underline{u} = \underline{0}$, oftewel $\mathcal{A}\underline{u} = \alpha\underline{u}$ en $\mathcal{A}\underline{v} = \alpha\underline{v} + \underline{u}$.

1.9 Voorbeeld. Beschouw het stelsel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking is $(\lambda - 3)^2 = 0$, dus is $\lambda = 3$ eigenwaarde met multipliciteit 2, maar we vinden $E_3 = \langle (1, 1) \rangle$. We zoeken nu oplossingen van de gedaante $\underline{x} = (\underline{u}t + \underline{v})e^{3t}$. Invullen geeft

$$(3\underline{u}t + 3\underline{v} + \underline{u})e^{3t} = (\mathcal{A}\underline{u}t + \mathcal{A}\underline{v})e^{3t},$$

dus $\mathcal{A}\underline{u} = 3\underline{u}$ en $\mathcal{A}\underline{v} = 3\underline{v} + \underline{u}$. Als $\underline{u} = \underline{0}$, dan is $\mathcal{A}\underline{v} = 3\underline{v}$, dus nemen we $\underline{v} = (1, 1)$; één oplossing is dus $(1, 1)e^{3t}$.

Aan $\mathcal{A}\underline{u} = 3\underline{u}$ voldoet $\underline{u} = (1, 1)$. Los nu $\underline{v}$ op uit $(\mathcal{A} - 3I)\underline{v} = \underline{u}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Dit stelsel heeft oplossingen: $2v_1 - 2v_2 = 1$, dus neem bijvoorbeeld $\underline{v} = (\frac{1}{2}, 0)$. Een andere oplossing van het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen is dus $\underline{x} = ((1, 1)t + (\frac{1}{2}, 0))e^{3t}$. We vinden dus als oplossingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

1.10 We gaan nu in op het vinden van een particuliere oplossing voor een inhomogeen stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen.

Daarbij gebruiken we af en toe het zogenaamde *superpositiebeginsel*: Als $\underline{p}_1$ een particuliere oplossing is van $\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{f}_1$ en als $\underline{p}_2$ een particuliere oplossing is van $\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{f}_2$, dan is $\underline{p}_1 + \underline{p}_2$ een particuliere oplossing van $\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} + (\underline{f}_1 + \underline{f}_2)$.

Deze eigenschap volgt direct uit de lineariteit van differentiëren en van $\mathcal{A}$.

Als (theoretische) inleiding beschouwen we het stelsel

$$\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{a}e^{\alpha t}$$

waarin $\underline{a}$ een constante vector is. In deze situatie proberen we een particuliere oplossing te vinden van de gedaante $\underline{x} = \underline{u}e^{\alpha t}$. Invullen levert

$$\alpha \underline{u} e^{\alpha t} = \mathcal{A} \underline{u} e^{\alpha t} + \underline{a} e^{\alpha t} ,$$

$$(\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}) \underline{u} = -\underline{a} .$$

We kunnen dus zo'n $\underline{u}$ vinden als $-\underline{a}$ (en dus $\underline{a}$) in de beeldruimte van $\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}$ ligt.

Als α geen eigenwaarde is, dan is de afbeelding $\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}$ inverteerbaar en heeft de vergelijking voor iedere $\underline{a}$ precies één oplossing. Als α wel een eigenwaarde is, dan zijn er oneindig veel oplossingen voor $\underline{u}$ als $-\underline{a}$ in de beeldruimte van $\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}$ ligt en geen enkele als $-\underline{a}$ niet in deze beeldruimte ligt.

In dit laatste geval proberen we een particuliere oplossing te vinden van het type $\underline{x} = (\underline{u}t + \underline{v})e^{\alpha t}$. Invullen levert dan

$$(\underline{u} + \alpha \underline{v} + \alpha \underline{u}t)e^{\alpha t} = (t\mathcal{A}\underline{u} + \mathcal{A}\underline{v} + \underline{a})e^{\alpha t} ,$$

$$\mathcal{A}\underline{u} = \alpha \underline{u}, \mathcal{A}\underline{v} + \underline{a} = \underline{u} + \alpha \underline{v} ,$$

$$(\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I})\underline{u} = \underline{0}, (\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I})\underline{v} = \underline{u} - \underline{a} .$$

We moeten nu dus een eigenvector $\underline{u}$ proberen te vinden zodanig dat $\underline{u} - \underline{a}$ in de beeldruimte van $\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}$ ligt. Meestal kan dat: laat $\mathcal{R}$ en $\mathcal{N}$ de beeldruimte en de nulruimte van $\mathcal{A} - \alpha \mathcal{I}$ zijn. Als $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{\underline{0}\}$, dan kan (omdat $\dim \mathcal{R} + \dim \mathcal{N} = n$) iedere vector $\underline{a}$ geschreven worden als $\underline{a} = \underline{u} + \underline{w}$ met $\underline{u} \in \mathcal{N}$ en $\underline{w} \in \mathcal{R}$. Dan geldt $\underline{u} - \underline{a} = -\underline{w} \in \mathcal{R}$, zodat $\underline{v}$ bestaat. Merk nog op dat de voorwaarde $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{\underline{0}\}$ betekent dat de multipliciteit van α als nulpunt van de karakteristieke vergelijking gelijk is aan de dimensie van de bijbehorende eigenruimte. In de zelden voorkomende situatie dat we nu nog geen particuliere oplossing gevonden hebben, proberen we $\underline{x} = (\underline{u}t^2 + \underline{v}t + \underline{w})e^{\alpha t}$, enz. We kunnen aantonen dat we uiteindelijk zo een oplossing vinden.

Om een particuliere oplossing te vinden van het stelsel

$$\underline{x}' = \mathcal{A}\underline{x} + \underline{p}(t)e^{\alpha t}$$

met $\underline{p}(t) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 t + \dots + \underline{a}_n t^n$ proberen we $\underline{x} = \underline{q}(t)e^{\alpha t}$ met $\underline{q}(t) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1 t + \dots + \underline{b}_n t^n$. Als dit niet gaat dan proberen we het nogmaals maar nu met een (vector)polynoom van graad $n + 1$, enz.

1.11 Voorbeeld. We zoeken een particuliere oplossing van

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Laat A de coëfficiëntenmatrix zijn en $\underline{a} = (6, -2, -4)$.

We zoeken een particuliere oplossing van de gedaante $\underline{x} = \underline{u}e^{2t}$. Invullen geeft

$$\begin{aligned} 2\underline{u}e^{2t} &= \mathcal{A}\underline{u}e^{2t}, \\ (\mathcal{A} - 2\mathcal{I})\underline{u} &= -\underline{a}, \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -8 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Dus $\underline{u} = (7, -4, -3)$ en een particuliere oplossing is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

1.12 Voorbeeld. We zoeken een particuliere oplossing van

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(t \begin{pmatrix} -22 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right) e^{2t}.$$

Laat A de coëfficiëntenmatrix zijn, $\underline{a} = (-22, 3, 10)$, $\underline{b} = (21, -6, -4)$. We proberen een oplossing $\underline{x} = (\underline{u}t + \underline{v})e^{2t}$. Invullen geeft

$$\begin{aligned} (\underline{u} + 2\underline{u}t + 2\underline{v})e^{2t} &= (\mathcal{A}\underline{u}t + \mathcal{A}\underline{v} + \underline{a}t + \underline{b})e^{2t}, \\ \mathcal{A}\underline{u} + \underline{a} &= 2\underline{u}, \quad \underline{u} + 2\underline{v} = \mathcal{A}\underline{v} + \underline{b}, \\ (\mathcal{A} - 2\mathcal{I})\underline{u} &= -\underline{a}, \quad (\mathcal{A} - 2\mathcal{I})\underline{v} = \underline{u} - \underline{b}. \end{aligned}$$

We lossen eerst de vergelijking voor $\underline{u}$ op:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -8 & 8 & 22 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

zodat $\underline{u} = (1, -1, 2)$. Nu met deze $\underline{u}$ de vergelijking voor $\underline{v}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -8 & 8 & -20 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Dus $\underline{v} = (2, 1, -1)$ en een particuliere oplossing is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^{2t}.$$

1.13 Voorbeeld. Beschouw het stelsel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

We lossen eerst het homogene stelsel op. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 9 = 0$, zodat de eigenwaarden $3i$ en $-3i$ zijn. We vinden $E_{3i} = \langle (1 + 3i, 5) \rangle$ en $E_{-3i} = \langle (1 - 3i, 5) \rangle$ zodat alle oplossingen van de homogene vergelijking zijn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3it},$$

of, in reële vorm:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1' \begin{pmatrix} \cos 3t - 3 \sin 3t \\ 5 \cos 3t \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} 3 \cos 3t + \sin 3t \\ 5 \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Om een particuliere oplossing te vinden merken we eerst op dat

$$\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}.$$

We zoeken nu een particuliere oplossing van

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}.$$

Omdat de matrix reëel is en $(\operatorname{Im} \underline{x})' = \operatorname{Im}(\underline{x}')$, is het imaginaire gedeelte van deze particuliere oplossing een particuliere oplossing van het oorspronkelijke stelsel.

Probeer dus $\underline{x} = \underline{u}e^{it}$. Invullen geeft $\underline{u}ie^{it} = (\mathcal{A}\underline{u} + \underline{a})e^{it}$, dat wil zeggen $(\mathcal{A} - i\mathcal{I})\underline{u} = -\underline{a}$. Uit het stelsel

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & -2 & -1 \\ 5 & -1-i & -i \end{array} \right)$$

volgt $\underline{u} = \frac{1}{8}(1-i, 4-i)$.

Een particuliere oplossing van het tweede stelsel is dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4-i \end{pmatrix} e^{it}$$

waarvan het imaginaire gedeelte is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\cos t + 4 \sin t \end{pmatrix}.$$

Alle reële oplossingen van het stelsel zijn dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\cos t + 4 \sin t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos 3t - 3 \sin 3t \\ 5 \cos 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \cos 3t + \sin 3t \\ 5 \sin 3t \end{pmatrix}$$

met c_1 en $c_2 \in \mathbb{R}$.

- 1.14** Tot slot van deze paragraaf merken we nog op dat we in de praktijk behalve het stelsel differentiaalvergelijkingen vaak ook nog een aantal voorwaarden hebben waaraan de oplossingen moeten voldoen. In zo'n geval bepalen we eerst de algemene oplossing van het stelsel en proberen dan de daarin voorkomende constanten zo te bepalen dat aan deze voorwaarden is voldaan.

2 Opgaven

- 1** Los de volgende stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

op, waarbij $\underline{x} = \underline{x}(t)$ eventueel nog voldoet aan een gegeven voorwaarde.

- a. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \underline{x},$
- b. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \underline{x}, \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$
- c. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} e^t,$
- d. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$
- e. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

2 Los de volgende stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f},$$

op, waarbij $\underline{x} = \underline{x}(t)$ eventueel nog voldoet aan een gegeven voorwaarde.

- a. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$
- b. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underline{x},$
- c. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x},$
- d. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix},$
- e. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}, \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0},$
- f. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \underline{x},$
- g. $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3 Bepaal de oplossingen van de volgende stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}, \\ \text{b.} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \underline{x}, \\ \text{c.} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} e^t. \end{array}$$

4 Los de volgende stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{f},$$

op, waarbij $\underline{x} = \underline{x}(t)$ eventueel nog voldoet aan een gegeven voorwaarde.

$$\text{a.} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{x},$$

$$\text{b.} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x},$$

$$\text{c.} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad \underline{x}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} t \right) e^{2t},$$

$$\text{e.} \quad \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \underline{x},$$

$$\text{f.} \quad \underline{x}' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ -4 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{g.} \quad \underline{x}' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ -4 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 4 \cos 2t + 3 \sin 2t \\ -3 \cos 2t - \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$