

Lineaire Afbeeldingen Augustus 2009

1. $D = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1 \}$

- a) De vergelijking luidt $\underline{a}^T A \underline{a} = 1$ met $\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De eigenwaarden van A zijn $\frac{1}{2}$ (met eigenvector ongespannen door de onderling loodrechte vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) en $-\frac{1}{2}$ (met eigenvector

Dus $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ voldoet. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

- b) Omdat P orthogonaal is, is $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ gelijk aan $x^2 + y^2 + u^2 + v^2$. Die laatste uitdrukking is te minimaliseren over alle (x, y, u, v) met $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 = 1$. Maar dan geldt: $0 \leq u^2 + v^2 = x^2 + y^2 - 2$ dus $x^2 + y^2 \geq 2$ en $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2(x^2 + y^2) - 2 \geq 4 - 2 = 2$ met gelijkheid als en alleen als $u = v = 0$.

Dus de "cirkel" van oplossingen in (x, y, u, v) -coördinaten is $\{ (x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 2 \}$. In (a, b, c, d) -coördinaten is dit

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

dus alle matrices van de vorm

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ met $x^2 + y^2 = 2$, ofwel alle orthogonale 2×2 matrices met determinant 1.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \det(tI - A) &= \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ a_0 & a_1 & t+a_2 \end{pmatrix} \\ &= t \cdot (t(t+a_2) + a_1) + a_0 = t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \end{aligned}$$

b. We zoeken de nulruimte van

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda+a_2 \end{pmatrix} \quad \text{waarbij } \lambda \text{ voldoet aan}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

vegen:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda+a_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 + \lambda(\lambda+a_2) & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \\ a_0 + \lambda(a_1 + \lambda(\lambda+a_2)) & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 0 !!$$

dus de eigenvector is

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

en inderdaad 1-dim.

c. Als p niet drie verschillende nulpunten heeft, dan is er dus een λ met $(t-\lambda)^3$ deeler van p . Dan is de algebraïsche multipliciteit van λ als eigenwaarde van A minstens 3, terwijl ~~dan~~ de meetkundige mult. van λ gelijk is aan 1. (zie b.)

dus A is dan niet ~~baar~~ diagonaliseerbaar.
 Als p wel drie verschillende nulpunten
 heeft, dan heeft A dus eigenvectoren
 bij drie verschillende eigenwaarden en
 die zijn noodnakeitig onafhankelijk en
 dus een basis van K .? (stelling uit
 college). Dus A is wel diagonaliseerbaar.

$$3. \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^3 - 1. \text{ Nulpunten: } (\lambda - 1)^3 = 1$$

$$\text{dus } \lambda_j = 1 + \zeta^j \text{ met } \zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ en } j = 0, 1, 2.$$

Anders: los op:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$\lambda = 2$ is een oplossing. Uitdelen:

$$\lambda - 2 \mid \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 \quad \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$- \lambda^2 + 3\lambda$$

$$- \lambda^2 + 2\lambda$$

$$\lambda - 2$$

$$\lambda - 2$$

$$\underline{\quad\quad\quad} 0$$

en nulpunten van $\lambda^2 - \lambda + 1$ zijn

$$\text{dus } \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

eigenruimte bij z : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eigenruimte bij $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

Maak $\begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

en dus eigenruimte $\left\langle \begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

en die bij $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$: $\left\langle \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Algemene reële oplossing:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{zt} + c_2 \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} \right) + c_3 \operatorname{Im} \left(\dots \right) \quad \text{met } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} \\ + C_3 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

b. De eigensruimten van A^{2009} zijn gelijk aan die van A . In het bijzonder is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4018t}$ een oplossing van $\underline{x}'(t) = A^{2009} \underline{x}(t)$, die voldoet aan de beginvoorwaarde.

4. $p_{-1}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$ $p_0(x) = -\frac{(x+1)(x-1)}{2}$ $p_1(x) = \frac{(x+1)x}{2}$

a.

x	-1	0	1
$p_{-1}(x)$	0	0	0
$p_0(x)$	0	1	0
$p_1(x)$	0	0	1

als $\sum c_i p_i = 0$, dan i.h.v. $\sum c_i p_i(x) = 0$ voor $x = -1, 0, 1$, dus volgens he zijn lin. onafh. en de dim. van $P_2(\mathbb{R})$ is 3, dus een basis.

b. • $A(q+r)(x) = (q+r)(-x) = q(-x) + r(-x) = (Aq + Ar)(x)$ dus $A(q+r) = Aq + Ar$ voor alle $q, r \in P_2(\mathbb{R})$

• $A(cq)(x) = (cq)(-x) = c \cdot (q(-x)) = c \cdot (Aq)(x) = (c \cdot Aq)(x)$ dus $A(cq) = c \cdot Aq$.

c.

$$\begin{matrix} & P_{-1} & P_0 & P_1 \\ \begin{matrix} P_{-1} \\ P_0 \\ P_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

d. $(S \circ T)(a, b, c) = S(ap_{-1} + bp_0 + cp_1)$

$$= \begin{pmatrix} (ap_{-1} + bp_0 + cp_1)(-1) \\ (ap_{-1} + bp_0 + cp_1)(0) \\ (ap_{-1} + bp_0 + cp_1)(1) \end{pmatrix}$$

$$= (a+0+0, 0+b+0, 0+0+c) = (a, b, c)$$

das $S \circ T = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Da $\dim \mathbb{R}^3 = \dim P_2(\mathbb{R})$

folgt das auch $T \circ S = \text{Id}_{P_2(\mathbb{R})}$.

~~5. a. $(A+B)^4 = ((A-I) + (B+I))^4 =$~~
 ~~$(A-I)^4 + 4(A-I)^3(B+I) + 6(A-I)^2(B+I)^2$~~
 ~~$+ 4(A-I)(B+I)^3 + (B+I)^4$~~

5. a.

$$\begin{aligned} (A+B)^3 &= ((A-I) + (B+I))^3 \\ &= \underbrace{(A-I)^3}_0 + 3 \underbrace{(A-I)^2}_0 (B+I) + 3(A-I) \underbrace{(B+I)^2}_0 + \underbrace{(B+I)^3}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

es $v \neq 0$

b. Als $(A+B)v = \lambda v$, das heißt
 wegen a):

$$0 = (A+B)^3 v = \lambda^3 v, \text{ das } \underline{\lambda = 0}.$$