

EXTRA BEWIJSOPGAVEN TOT 8.4

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Zij V een 3-dimensionale vectorruimte, en $A : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Neem aan dat $\dim \ker A = 2$ en $\dim \ker A^2 = 3$.

- (1) Laat zien dat er $v, w \in V$ bestaan waarvoor geldt: $w \neq 0$ en $Aw = 0$ en Av is geen scalair veelvoud van w .
- (2) Laat zien dat voor zulke v, w het drietal v, Av, w een basis B van V is.
- (3) Bepaal de matrix $[A]_B$ van A ten opzichte van deze basis.

Opgave 0.2 (Symmetrische afbeeldingen). Zij V een reële inproductruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en zij A een lineaire afbeelding van V naar zichzelf die voldoet aan $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ voor alle $v, w \in V$; zo'n afbeelding heet *symmetrisch*.

- (1) Bewijs dat $\ker A \cap R(A) = \{0\}$.
- (2) Bewijs dat als V eindigdimensionaal is, elk element van V op unieke manier te schrijven is als een element in $\ker A$ en een element in $R(A)$.
- (3) Neem nu voor V de ruimte van alle continue reëelwaardige functies op het interval $[0, 1]$ met inproduct $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Zij a een element van V , en bekijk $A : V \rightarrow V$ gedefinieerd door $(Af)(x) = a(x)f(x)$. Laat zien dat A symmetrisch is.
- (4) Neem in het vorige voorbeeld $a(x) = \sqrt{x}$. Laat zien dat de functie $f \in V$ met $f(x) = x$ niet te schrijven is als som van iets in $\ker A$ en iets in $R(A)$.

1. VORIGE BLAD EXTRA OPGAVEN

Opgave 1.1. Als $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is, dan schrijven we T^2 voor $T \circ T$, T^3 voor $T \circ T \circ T$, enzovoorts. Bewijs dat $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \dots$ en $R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq R(T^3) \supseteq \dots$. Kun je een voorbeeld van een oneindigdimensionale vectorruimte V en een lineaire afbeelding T geven, waarvoor $\ker T^i \neq \ker T^{i+1}$ voor alle i ?

Opgave 1.2. Stel een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow V$ voldoet aan $(A + I)^2 = 0$. Laat zien dat A inverteerbaar is.

Opgave 1.3. Als V een reële vectorruimte is en $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ een basis van V , laat zien dat de afbeelding $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \mapsto [\underline{v}]_B$, die aan $\underline{v}$ zijn coefficientvector ten opzichte van B toevoegt, een inverteerbare lineaire afbeelding is.

Opgave 1.4. (Moeilijk.) Neem aan dat S, T lineaire afbeeldingen $V \rightarrow V$ zijn, waarbij V een reële vectorruimte van oneven dimensie is. Laat zien dat er een vector $\underline{v} \in V, \underline{v} \neq 0$ bestaat waarvoor $\{S\underline{v}, T\underline{v}\}$ lineair afhankelijk is. (Hint: als $\ker S \neq \{0\}$, neem $\underline{v} \in \ker S$. Anders zoek naar eigenvectoren van (een matrix bij) $S^{-1} \circ T$.)