

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.5, 8.6 EN MARKOVKETENS

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Laat A en C gelijkvormige matrices zijn (ter herinnering: d.w.z. er is een inverteerbare P met $A = PCP^{-1}$). Bewijs:

- (1) $\text{tr } A = \text{tr } C$.
- (2) $\dim N(A) = \dim N(C)$.
- (3) Als bovendien C gelijkvormig is met een derde matrix B , dan is A gelijkvormig met B .

Opgave 0.2 (Google's PageRank). In Figuur 1 is een klein world-wide-webje getekend. De dikke punten, genummerd van 1 tot en met 4, geven websites weer en de pijlen daartussen hyperlinks. We willen nu quantificeren hoe populair deze vier sites zijn. Daartoe bekijken we de volgende *Markovketen*: na elke tijdstap surft een gebruiker van dit mini-WWW langs een willekeurige link van de pagina waar hij zich nu bevindt naar een volgende pagina.

- (1) Bepaal de overgangsmatrix van deze Markovketen; d.w.z. de matrix A waarvan de entry op positie (i, j) de kans is dat een gebruiker als hij in j zit naar positie i gaat.
- (2) Bepaal de eigenruimte van A bij eigenwaarde 1. Laat $\underline{v}$ een (de) vector in deze ruimte zijn waarvan de som der coördinaten 1 is.
- (3) Neem aan dat $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ een eigenvector van A is bij een eigenwaarde ongelijk aan 1. Bewijs dat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

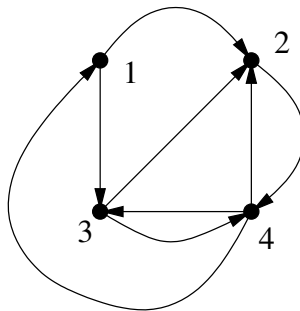


FIGURE 1. Een mini-WWW

Hint: bereken de uitdrukking

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

op twee manieren.

- (4) Gegeven is dat de overige eigenwaarden van A absolute waarden (ongeveer) 0.546763, 0.546763, 0.278753 hebben (de eerste twee horen bij aan elkaar geconjugeerde complexe eigenwaarden van A). Bewijs dat $A^n \underline{e}_i$ voor $n \rightarrow \infty$ convergeert naar $\underline{v}$ voor alle $i = 1, 2, 3, 4$.
- (5) Interpreteer dit resultaat in termen van populariteit van de vier sites.

Google's PageRank is een variant op dit eenvoudige principe; zie

<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel07/mrt2006/pdf/litvak.pdf>

Opgave 0.3. Bekijk de lineaire afbeeldingen $S, T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_{n+1}(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$(Sp)(x) := xp(x) \text{ en } (Tp)(x) := \int_0^x p(t)dt.$$

- (1) Laat zien dat $R(S) = R(T)$.
- (2) Laat zien dat $\ker S = \ker T = \{0\}$.
- (3) Als afbeelding van $P_n(\mathbb{R}) \rightarrow R(S)$ heeft S een inverse. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van de afbeelding $S^{-1}T$, die $P_n(\mathbb{R})$ in zichzelf afbeeldt?