

## EXTRA OPGAVEN VOOR 8.1,8.2,8.3,8.4

JAN DRAISMA

**Opgave 0.1.** Als  $T : V \rightarrow V$  een lineaire afbeelding is, dan schrijven we  $T^2$  voor  $T \circ T$ ,  $T^3$  voor  $T \circ T \circ T$ , enzovoorts. Bewijs dat  $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \dots$  en  $R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq R(T^3) \supseteq \dots$ . Kun je een voorbeeld van een oneindigdimensionale vectorruimte  $V$  en een lineaire afbeelding  $T$  geven, waarvoor  $\ker T^i \neq \ker T^{i+1}$  voor alle  $i$ ?

**Opgave 0.2.** Stel een lineaire afbeelding  $A : V \rightarrow V$  voldoet aan  $(A + I)^2 = 0$ . Laat zien dat  $A$  inverteerbaar is.

**Opgave 0.3.** Als  $V$  een reële vectorruimte is en  $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  een basis van  $V$ , laat zien dat de afbeelding  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{v} \mapsto [\underline{v}]_B$ , die aan  $\underline{v}$  zijn coefficientvector ten opzichte van  $B$  toevoegt, een inverteerbare lineaire afbeelding is.

**Opgave 0.4.** (Moeilijk.) Neem aan dat  $S, T$  lineaire afbeeldingen  $V \rightarrow V$  zijn, waarbij  $V$  een reële vectorruimte van oneven dimensie is. Laat zien dat er een vector  $\underline{v} \in V, \underline{v} \neq 0$  bestaat waarvoor  $\{S\underline{v}, T\underline{v}\}$  lineair afhankelijk is. (Hint: als  $\ker S \neq \{0\}$ , neem  $\underline{v} \in \ker S$ . Anders zoek naar eigenvectoren van (een matrix bij)  $S^{-1} \circ T$ .)