

EXTRA OPGAVEN VOOR 7.3, 9.6, EN 9.7

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Geef een direct bewijs van de volgende uitspraak: als A een symmetrische matrix is, en $\underline{u}, \underline{v}$ zijn eigenvectoren van A bij verschillende eigenwaarden, dan staan $\underline{u}$ en $\underline{v}$ loodrecht op elkaar. (Hint: bereken $\underline{u}^T A \underline{v}$ op twee verschillende manieren.)

Opgave 0.2. Als A een *anti-symmetrische* matrix (d.w.z. dat $A^T = -A$), dan geldt $\underline{x}^T A \underline{x} = 0$ voor alle $\underline{x}$. Bewijs dit.

Opgave 0.3. Bewijs of weerleg: $\{0\}, \langle \underline{e}_1 \rangle, \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle, \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ zijn de enige vier deelruimten van $\mathbb{R}^3$ die invariant zijn onder de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 0.4. Bekijk de kromme K in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 1.$$

Wat voor kromme is dit? Vind de punten op K die het dichtst bij de oorsprong liggen.