Uitwerkingen Lineaire Afbeeldingen Augustus 2008

Opgave 1

In[4]:=
```
f1[x_] := Cos[x]; f2[x_] := Sin[x]; f3[x_] := x Cos[x]; f4[x_] := x Sin[x];
```

Onderdeel a.

Het volgende commando rekent elk van de functies uit in de punten 0,Pi,Pi/2,–Pi/2; dus de eerste rij correspondeert met f1, de eerste kolom met 0, etc.

In[12]:=
```
Outer[#1[#2] &, {f1, f2, f3, f4}, {0, Pi, Pi / 2, -Pi / 2}]
```

Out[12]=
$$\left\{\{1, -1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, -1\}, \{0, -\pi, 0, 0\}, \left\{0, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right\}$$

Deze vier rijvectoren zijn lineair onafhankelijk, dus zijn f1,...,f4 het ook.

Onderdeel b.

Standaard.

Onderdeel c.

In[14]:=
```
DD = {{0, 1, 1, 0}, {-1, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, -1, 0}};
```

In[15]:=
```
Eigensystem[DD]
```

Out[15]=
$$\{\{i, i, -i, -i\}, \{\{-i, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{i, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}\}$$

Dus de eigenwaarden zijn i en –i, beide met algebraische multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1 (*Mathematica* zegt dit door {0,0,0,0} als eigenvector te geven−−−onzin natuurlijk). Eigenvectoren: –if1 + f2 resp. if1+f2.

Onderdeel d.

Nee, want de algebraische multipliciteit van bijvoorbeeld i is niet de meetkundige multipliciteit.

Opgave 2.

Onderdeel a.

In[16]:=
```
A = {{1 / 2, 1 / 10}, {1 / 2, 9 / 10}};
```

In[19]:=
```
EE = Eigensystem[A]
```

Out[19]=
$$\left\{\left\{1, \frac{2}{5}\right\}, \left\{\left\{\frac{1}{5}, 1\right\}, \{-1, 1\}\right\}\right\}$$

In[24]:=
```
P = Transpose[EE[[2]]]; DD = DiagonalMatrix[EE[[1]]];
```

Check:

In[25]:=
```
P.DD.Inverse[P]
```

Out[25]=
$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}\right\}$$

Nu geldt natuurlijk: A^n=P.DD^n.P, dus bekijk:

In[27]:=
```
P.MatrixPower[DD, n].Inverse[P] // MatrixForm
```

Out[27]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} & \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\,2^{-1+n}\,5^{-n} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} & \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\,2^{-1+n}\,5^{-n} \end{pmatrix}$$

Als n naar oneindig gaat, convergeert deze matrix naar de matrix
$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

■ Onderdeel b.

Op dag n is de kansverdeling {kans op regen, kans op zon} gelijk aan A {p,1−p}^T. Om dit uit te rekenen, schrijf x_0={p,1−p}^T als lineaire combinatie c*{1/6,5/6} + d*{−1,1}. Dan geldt c=1 omdat de som van de coordinaten 1 is (en d ligt tussen −5/6 en 1/6). Maar nu geldt A^n x_0={1/6,5/6} + d*{−1,1}*(2/5)^n, en dit convergeert naar {1/6,5/6}.

Opgave 3.

■ Onderdeel a.

In[29]:=
```
A = {{1, 0, 0}, {0, 1 / 3, 2 Sqrt[2] / 3}, {0, 2 Sqrt[2] / 3, -1 / 3}};
```

In[30]:=
```
Eigensystem[A]
```

Out[30]=
$$\left\{\{-1, 1, 1\}, \left\{\left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right\}, \left\{0, \sqrt{2}, 1\right\}, \{1, 0, 0\}\right\}\right\}$$

We kunnen dus bijvoorbeeld P gelijk nemen aan

In[32]:=
```
P =
  {{1, 0, 0}, {0, Sqrt[2] / Sqrt[3], 1 / Sqrt[3]}, {0, -1 / Sqrt[3], Sqrt[2] / Sqrt[3]}} // Transpose;
```

Check:

In[33]:=
```
Inverse[P].A.P
```

Out[33]=
$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, -1\}\}$$

In[39]:=
```
P.Transpose[P]
```

Out[39]=
```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

In[40]:=
```
Det[P]
```

Out[40]=
```
1
```

■ Onderdeel b.

Vertaal het punt eerst naar (u,v,w)−coordinaten:

In[44]:=
```
Inverse[P].{0, 2 / Sqrt[3], Sqrt[2] / Sqrt[3]}
```

Out[44]=
$$\left\{0, \sqrt{2}, 0\right\}$$

Dus we moeten kijken naar lijnen {at,Sqrt[2]+bt,ct} die helemaal op u^2+v^2−w^2=2 liggen. Invullen en coefficienten van t en t^2 gelijkstellen levert b=0 en a^2−c^2=0, dus a=plus of min b. De oplossingen zijn dus:

In[45]:=
```
P.{t, Sqrt[2], t}
```

Out[45]=
$$\left\{t, \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\ t\right\}$$

en

In[47]:=
```
P.{t, Sqrt[2], -t}
```

Out[47]=
$$\left\{t, \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\ t\right\}$$

Opgave 4.

■ Onderdeel a.

Als Bw=0, dan zeker (AB)w=A(Bw)=A0=0, dus ker B is bevat in ker AB

■ Onderdeel b.

Als ABv=cB, bekijk dan BABv. Deze vector is niet nul, want BAB is injectief. En er geldt BA(BABv)=(BAB)(ABv)=BAB(cv)=c(BABv). Dus BABv is een eigenvector van BA bij eigenwaarde c.

■ Onderdeel c.

Neem bijvoorbeeld V=polynomen van graad hooguit 2, W=polynomen van graad hooguit 1, A=differentieren, B=integreren vanuit 0. Dan geldt BAB=BI=B en B is injectief, maar ABA zeker niet, want ABA1=0.

Opgave 5.

■ Onderdeel a.

In[48]:=
```
A = {{-1, -1}, {1, -3}};
```

In[49]:=
```
Eigensystem[A]
```

Out[49]=
```
{{-2, -2}, {{1, 1}, {0, 0}}}
```

Oppassen geblazen! De eigenwaarde −2 heeft meetkundige multipliciteit. Dus iig is {1,1}e^(−2t) een oplossing. Probeer nu een oplossing van de vorm x=a e^(−2t)+b t e^(−2t). Differentieren geeft (−2a+b)e^(−2t) −2bt e^(−2t), en dit moet gelijk zijn aan (A.a)e^(−2t) + (A.b)te^(−2t). Dus blijkbaar willen we dat A.b=−2b, dus bijvoorbeeld b={1,1}. De vergelijking voor a={a_1,a_2} wordt nu: (−2−A)a=−{1,1}. Dit geeft a={1,0}. Dus een verdere oplossing is {1,0}e^(−2t)+{1,1}te^{−2t}. De algemene oplossing is opgespannen door deze twee fundamentele oplossingen. Check:

In[66]:=
```
x = c {1, 1} Exp[-2 t] + d ({1, 0} Exp[-2 t] + {1, 1} t Exp[-2 t]);
```

In[67]:=
```
D[x, t] - A.x // Simplify
```

Out[67]=
```
{0, 0}
```

■ Onderdeel b.

In[69]:=
```
D[x, t] /. {t → 0}
```

Out[69]=
```
{-2 c - d, -2 c + d}
```

Dus de oplossing is c=−1, d=1. Deze heeft beginpunt x(0)=

In[71]:=
```
x /. {c → -1, d → 1, t → 0}
```

Out[71]=
```
{0, -1}
```