

# TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

23 juni 2008

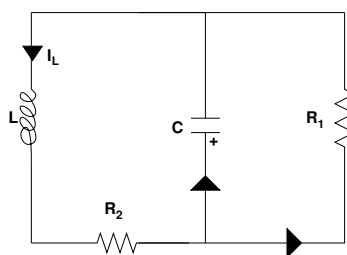
## Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden. Bij dit tentamen mag een gewone rekenmachine gebruikt worden (geen grafische rekenmachine).

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

| Onderdeel     | 1a | 1b | 1c(bonus) | 2a | 2b | 2c | 2d | 3a | 3b | 4a | 4b | 4c | 4d |
|---------------|----|----|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Aantal punten | 4  | 2  | 2         | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 4  | 4  | 4  | 3  | 3  |

1.



De schakeling hierboven kan worden beschreven met de differentiaalvergelijking

$$\begin{bmatrix} I_L' \\ V_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & -1/L \\ 1/C & -1/(R_1 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix},$$

waarbij  $I_L$  de stroom door de spoel met zelfinductie  $L$  is,  $V_C$  het spanningsverschil over de condensator met capaciteit  $C$  is en  $R_1, R_2$  de weerstanden zijn.

- (a) Vind de algemene reële oplossing van dit stelsel voor  $R_1 = 5$ ,  $R_2 = 4/5$ ,  $C = 1/10$  en  $L = 2/5$ .
- (b) Neem aan dat op tijdstip nul  $I_L = 3$  en  $V_C = 3$ . Bepaal  $I_L$  en  $V_C$  als functie van de tijd.
- (c) (Bonusvraag) Leidt het stelsel hierboven af uit de bekende wetten  $V_L = LI_L'$ ,  $V_R = RI_R$ ,  $V_C' = I_C/C$  voor spoel, weerstand, en condensator.

2. Bekijk de ruimte  $P_2(\mathbb{R}) = \{x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  van alle reële polynomen van graad hooguit 2. Neem aan dat we drie reële getallen  $b_0, b_1, b_2$  hebben vastgelegd. Bekijk de afbeelding  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  gedefinieerd door  $Tp := (p(b_0), p(b_1), p(b_2))$ .

- (a) Laat zien dat  $T$  een lineaire afbeelding is.

- (b) Bepaal de matrix  $[T]_{B,B'}$  van  $T$  ten opzichte van de basis  $B' = \{1, x, x^2\}$  van  $P_2(\mathbb{R})$  en de standaardbasis  $B$  van  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) Neem aan dat  $b_0, b_1, b_2$  verschillend zijn. Laat zien dat  $T$  injectief is—d.w.z. dat de nulruimte, of kern, van  $T$  gelijk is aan  $\{0\}$ .
- (d) Neem nu aan dat  $b_0 = b_1$ . Bewijs dat  $T$  niet injectief is.

3. Bekijk de kromme

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 32x^2 + 60xy + 7y^2 = 13\}.$$

- (a) Bepaal een orthogonale overgangsmatrix  $P$  en getallen  $\lambda > \mu$  zo dat in de coördinaten  $u, v$  gegeven door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

de kromme  $K$  gegeven wordt door de vergelijking  $\lambda u^2 + \mu v^2 = 13$ .

- (b) Bepaal de  $(x, y)$ -coördinaten van de punten van  $K$  op minimale afstand van de oorsprong  $(0, 0)$ .

4. Een stelling uit het college, die je in deze opgave kunt gebruiken, zegt dat een hermitische matrix, d.w.z., een complexe matrix  $B$  die voldoet aan  $B^* = B$ , diagonaliseerbaar is en alleen reële eigenwaarden heeft. Deze opgave gaat over een matrix  $A$  die voldoet aan  $A^* = -A$ ; zo'n matrix heet *anti-hermitisch*. *Opmerking: als je deze opgave voor algemene  $A$  te moeilijk vindt, dan krijg je de helft van de punten als je haar voor algemene anti-hermitische  $2 \times 2$ -matrices oplost.*

- (a) Laat zien dat  $A$  diagonaliseerbaar is en alleen maar puur imaginair eigenwaarden heeft, d.w.z. eigenwaarden van de vorm  $ia$  met  $a$  een reëel getal. (Hint: bekijk  $iA$ ).

Bekijk nu het (complexe) stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \tag{*}$$

bij de anti-hermitische matrix  $A$ .

- (b) Bewijs dat alle oplossingen  $\underline{x}$  van het stelsel (\*) begrensd zijn, d.w.z. dat de norm  $\|\underline{x}(t)\|$  voor alle  $t$  begrensd blijft. (Hint: wat voor e-machten komen voor in de oplossing?)
- (c) Bewijs dat voor elke complexe  $n \times n$ -matrix  $M$  geldt  $\underline{x} \cdot (M\underline{y}) = (M^*\underline{x}) \cdot \underline{y}$  voor alle  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ ; hier is  $\cdot$  het standaard complexe inproduct.
- (d) Stel dat we twee oplossingen  $\underline{x}(t)$  en  $\underline{y}(t)$  van (\*) hebben met de eigenschap dat  $\underline{x}(0)$  en  $\underline{y}(0)$  loodrecht op elkaar staan ten opzicht van het standaard complexe inproduct. Bewijs dat  $\underline{x}(t)$  en  $\underline{y}(t)$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$  loodrecht op elkaar staan. (Hint: volgens de productregel geldt  $\frac{d}{dt}(\underline{x}(t) \cdot \underline{y}(t)) = \underline{x}'(t) \cdot \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \cdot \underline{y}'(t)$ .)