

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

22 augustus 2007

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden.

De puntenverdeling is hieronder aangegeven. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, 1 bij het resultaat op te tellen en af te ronden.

Onderdeel	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d
Aantal punten	4	2	5	2	2	3	3	3	3	3	2	4

1. In deze opgave hebben de begrippen “orthogonaal” en “afstand” betrekking op het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$. Bekijk het kwadratische oppervlak M in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 13x^2 + 13y^2 + 10z^2 + 2xy + 8xz + 8yz = 1\};$$

dit is een ellipsoïde.

- (a) Vind een orthogonale matrix P en positieve reële getallen $\lambda > \mu >$

$$\nu \text{ zo dat in de coördinaten } u, v, w \text{ vastgelegd door } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

de vergelijking voor M er uitziet als $\lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2 = 1$. Je mag hierbij gebruiken dat $\lambda = 18$.

- (b) Bepaal de (x, y, z) -coördinaten van beide punten van M op minimale afstand van de oorsprong.

2. Een puntmassa P beweegt zich in $\mathbb{R}^2$ onder invloed van een krachtveld, en bevindt zich op tijdstip t in het punt $(x(t), y(t))$. Met de tweede wet van Newton is afgeleid dat

$$x''(t) = y(t) \text{ and } y''(t) = x(t) \text{ voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

Schrijf nu u voor x' and v voor y' . Dan is dit stelsel te schrijven als het eerste-ordestelsel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}.$$

- (a) Vind de algemene reële oplossing van dit stelsel.
- (b) Neem aan dat de beweging van P periodiek is. Laat zien dat P zich uitsluitend op de lijn met vergelijking $x + y = 0$ beweegt.

- (c) Neem aan dat $x(0) = 1$ en dat $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ voor $t \rightarrow \infty$. Bepaal $(x(t), y(t))$.

3. Met

$$P_n(\mathbb{R}) := \{x \mapsto a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

geven we de ruimte van reële polynomen van graad hooguit n aan. Beschouw de lineaire afbeeldingen T, S van $P_2(\mathbb{R})$ naar $P_3(\mathbb{R})$ gegeven door

$$(Tp)(x) := \int_1^x p(t)dt \text{ en } (Sp)(x) := (x-1)p(x).$$

Er geldt dus bijvoorbeeld $T(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ en $S(x^2+1) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$.

- (a) Laat zien dat T en S beide injectief zijn, en dat S en T dezelfde beeldruimte (*range*) hebben.

Zij $V \subseteq P_3(\mathbb{R})$ de gemeenschappelijke beeldruimte van S en T . Beschouw S en T vanaf nu als lineaire afbeeldingen van $P_2(\mathbb{R})$ naar V ; als zodanig zijn ze inverteerbaar.

- (b) Laat zien dat de matrix van $S^{-1}T$ ten opzichte van de standaard-

$$\text{basis } 1, x, x^2 \text{ van } P_2(\mathbb{R}) \text{ gelijk is aan } \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- (c) Voor welke polynomen p is Sp een scalair veelvoud van Tp ?

4. Zij $M_2(\mathbb{C})$ de ruimte van complexe 2×2 -matrices. Zij $\text{tr} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ het spoor (*trace*), dat wil zeggen, de afbeelding die aan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ het getal $a_{11} + a_{22}$ toevoegt.

- (a) Laat zien dat tr een lineaire afbeelding is en voldoet aan $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ voor alle $A, B \in M_2(\mathbb{C})$.

Definieer nu $\beta(A, B) := \text{tr}(A(B^*)) \in \mathbb{C}$ voor alle $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. (Ter herinnering: B^* ontstaat uit B door te transponeren en bovendien van alle entries de complex geconjugeerde te nemen.)

- (b) Laat zien dat β een inproduct op $M_2(\mathbb{C})$ is. (Hint: als je geen ander idee hebt, druk dan $\beta(A, B)$ expliciet uit in de a_{ij} en b_{ij} .)
 (c) Bereken de orthogonale projectie van de identiteitsmatrix op het lineaire opspansel van $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}$.
 (d) Bewijs: als $U \in M_2(\mathbb{C})$ unitair is ten opzichte van het standaard-inproduct op $\mathbb{C}^2$ (d.w.z. $UU^* = I$), dan geldt

$$\beta(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = \beta(A, B) \text{ voor alle } A, B \in M_2(\mathbb{C}).$$