

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.5, 8.6 EN MARKOVKETENS

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Laat A en C gelijkvormige matrices zijn (ter herinnering: d.w.z. er is een inverteerbare P met $A = PCP^{-1}$). Bewijs:

- (1) $\text{tr } A = \text{tr } C$.
- (2) $\dim R(A) = \dim R(C)$.
- (3) Als bovendien C gelijkvormig is met een derde matrix B , dan is A gelijkvormig met B .

Opgave 0.2. Als V en W reële vectorruimten van dezelfde eindige dimensie zijn, dan is er een isomorfisme (bijjectieve lineaire afbeelding) $V \rightarrow W$. Bewijs dit.

Opgave 0.3 (Google's PageRank). In Figuur 1 is een klein world-wide-webje getekend. De dikke punten, genummerd van 1 tot en met 4, geven websites weer en de pijlen daartussen hyperlinks. We willen nu quantificeren hoe populair deze vier sites zijn. Daartoe bekijken we de volgende *Markovketen*: na elke tijdstap surft een gebruiker van dit mini-WWW langs een willekeurige link van de pagina waar hij zich nu bevindt naar een volgende pagina.

- (1) Bepaal de overgangsmatrix van deze Markovketen; d.w.z. de matrix A waarvan de entry op positie (i, j) de kans is dat een gebruiker als hij in j zit naar positie i gaat.
- (2) Een stelling uit het college zegt dat als A of een positieve macht van A alleen maar strikt positieve entrees heeft, de eigenruimte

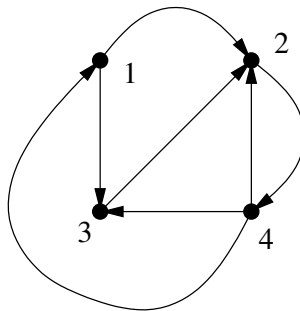


FIGURE 1. Een mini-WWW

van A bij eigenwaarde 1 eendimensionaal is. Voldoet A aan deze eis?

- (3) Vind de vector in deze eigenruimte waarvan de som der coördinaten 1 is; deze geeft de *limietverdeling* weer.
- (4) Welke site(s) is/zijn het populairst? Die komen bij Google bovenaan te staan!

Google's PageRank is een variant op dit eenvoudige principe; zie

<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel107/mrt2006/pdf/litvak.pdf>

Opgave 0.4. Bekijk de lineaire afbeeldingen $S, T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_{n+1}(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$(Sp)(x) := xp(x) \text{ en } (Tp)(x) := \int_0^x p(t)dt.$$

- (1) Laat zien dat $R(S) = R(T)$.
- (2) Laat zien dat $\ker S = \ker T = \{0\}$.
- (3) Als afbeelding van $P_n(\mathbb{R}) \rightarrow R(S)$ heeft S een inverse. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van de afbeelding $S^{-1}T$, die $P_n(\mathbb{R})$ in zichzelf afbeeldt?