

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.1,8.2,8.3,8.4—VERVOLG

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Laat $a_0, \dots, a_n$ reële getallen zijn. Zij T de afbeelding $P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die aan een polynoom p van graad $\leq n$ de vector $(p(a_0), \dots, p(a_n))^T$ toevoegt.

- (1) Laat zien dat T lineair is.
- (2) Bewijs dat $\ker T = \{0\}$ als en alleen als alle a_i verschillend zijn (hint: een polynoom van graad n heeft hooguit n nulpunten).
- (3) Bepaal de matrix $[T]_{B,C}$ van T waarbij B de standaardbasis van $\mathbb{R}^{n+1}$ is en C de basis $1, x, x^2, \dots, x^n$ van $P_n(\mathbb{R})$. (Deze matrix heet een *Vandermonde matrix*.)

Opgave 0.2. Bekijk de reële vectorruimte $V = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle$ waarbij f_i de functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^i e^{2t}$ is.

- (1) Laat zien dat de lineaire afbeelding D die aan een differentieerbare functie f zijn afgeleide toevoegt V in zichzelf afbeeldt.
- (2) Bepaal de matrix $[D]_{B,B}$ ten opzichte van de basis $B = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$. Wat zijn de eigenwaarden?