

EXTRA OPGAVEN VOOR 8.1,8.2,8.3,8.4

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Als $T : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is, laat zien dat $\ker T$ een deelruimte is van V en $R(T)$ een deelruimte is van W .

Opgave 0.2. Als $T : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is, dan schrijven we T^2 voor $T \circ T$, T^3 voor $T \circ T \circ T$, enzovoorts. Laat zien dat $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \dots$ en $R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq R(T^3) \supseteq \dots$. Kun je een voorbeeld van een oneindigdimensionale vectorruimte V en een lineaire afbeelding T geven, waarvoor $\ker T^i \neq \ker T^{i+1}$ voor alle i ?

Opgave 0.3. Als V een reële vectorruimte is en $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ een basis van V , laat zien dat de afbeelding $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \mapsto [\underline{v}]_B$, die aan $\underline{v}$ zijn coefficientvector ten opzichte van B toevoegt, een inverteerbare lineaire afbeelding is.

Opgave 0.4. (Moeilijk.) Neem aan dat S, T lineaire afbeeldingen $V \rightarrow V$ zijn, waarbij V een reële vectorruimte van oneven dimensie is. Laat zien dat er een vector $\underline{v} \in V, \underline{v} \neq 0$ bestaat waarvoor $\{S\underline{v}, T\underline{v}\}$ lineair afhankelijk is. (Hint: als $\ker S \neq \{0\}$, neem $\underline{v} \in \ker S$. Anders zoek naar eigenvectoren van (een matrix bij) $S^{-1} \circ T$.)