

■ Anton-Rorres 8.4.11

In[1]:= $A = \{\{1, 3, -1\}, \{2, 0, 5\}, \{6, -2, 4\}\};$

a. Dit is makkelijk: de coördinaten van $T(v_1)$ ten opzichte van B staan in de eerste kolom van A , dus het antwoord de kolomvector $[1, 2, 6]^T$. (T staat voor getransponeerd.) Net zo is $[T(v_2)]_B$ gelijk aan $[3, 0, -2]^T$ en $[T(v_3)]_B$ gelijk aan $[-1, 5, 4]^T$.

In[2]:= $v_1 = 3x + 3x^2; v_2 = -1 + 3x + 2x^2; v_3 = 3 + 7x + 2x^2;$

b. Het polynoom waarvan de coördinaten 1, 2, 6 t.o.v. B zijn, is

In[4]:= $1 * v_1 + 2 * v_2 + 6 * v_3 // \text{Expand}$

Out[4]= $16 + 51x + 19x^2$

Net zo voor de andere twee kolommen:

In[5]:= $3 * v_1 - 2 * v_3 // \text{Expand}$

Out[5]= $-6 - 5x + 5x^2$

In[6]:= $-1 * v_1 + 5 * v_2 + 4 * v_3 // \text{Expand}$

Out[6]= $7 + 40x + 15x^2$

c. Gegeven is $A = [T]_B$. Gevraagd wordt eigenlijk $[T]_{B'}$ waarbij $B' = 1, x, x^2$. Dit is gelijk aan $[Id]_{B'} B [T]_B [Id]_{B, B'}$. De eerste matrix heeft als j -e kolom de coëfficiënten van v_j t.o.v. B' , dus die matrix is

In[7]:= $P = \{\{0, -1, 3\}, \{3, 3, 7\}, \{3, 2, 2\}\}$

Out[7]= $\{\{0, -1, 3\}, \{3, 3, 7\}, \{3, 2, 2\}\}$

In[8]:= $P // \text{MatrixForm}$

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dus het antwoord op de vraag wordt gegeven door de matrix (zie ook boek)

In[10]:= $B = P.A.\text{Inverse}[P]$

Out[10]= $\left\{ \left\{ \frac{239}{24}, -\frac{161}{24}, \frac{289}{24} \right\}, \left\{ \frac{201}{8}, -\frac{111}{8}, \frac{247}{8} \right\}, \left\{ \frac{61}{12}, -\frac{31}{12}, \frac{107}{12} \right\} \right\}$

d. Vermenigvuldig de matrix hierboven met de coëfficientvector van het polynoom t.o.v. B' , dus

In[11]:= $B.\{1, 0, 1\}$

Out[11]= $\{22, 56, 14\}$

en dit geeft het polynoom $22+56x+14x^2$

■ Anton-Rorres 8.4.16

Gezocht is de matrix $[T]_B$. De eerste kolom bevat de coördinaten van $Tv_1=v_2$ t.o.v. B , dus die kolom is $[0, 1, 0, 0]^T$. De tweede kolom bevat de coördinaten van $Tv_2=v_3$ t.o.v. B , dus die kolom is $[0, 0, 1, 0]^T$. Enzovoorts; dit geeft de matrix

```
In[12]:= {{0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}} // MatrixForm
```

```
Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■ Anton-Rorres 8.5.2

Eerst de overgangsmatrix $P=P_{EB}$ van B naar de standaardbasis $E=[1,0]^T, [0,1]^T$:

```
In[15]:= P = {{2, 4}, {2, -1}};
```

Dan de matrix van T ten opzichte van de standaardbasis (aflezen):

```
In[16]:= TE = {{1, 7}, {3, -4}};
```

Dus de matrix van T ten opzichte van B is (hier gebruiken we 8.5.2 ook al, maar je had het natuurlijk ook met de hand kunnen doen---eerst Tu_1, Tu_2 uitdrukken in u_1, u_2):

```
In[25]:= TB = Inverse[P] . TE . P;
```

```
In[26]:= TB // MatrixForm
```

```
Out[26]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

Nu de overgangsmatrix $Q=P_{BB'}$ van B' naar B : ten eerste geldt $v_2=-u_1/2$, dus de tweede kolom is $[-1/2, 0]^T$. Voor de eerste kolom:

```
In[20]:= Inverse[P] . {{1}, {3}}
```

```
Out[20]= {{13/10}, {-2/5}}
```

Dus er geldt

```
In[22]:= Q = {{13/10, -1/2}, {-2/5, 0}};
```

```
In[24]:= Q // MatrixForm
```

```
Out[24]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Nu berekenen we de matrix van T ten opzichte van B' door $P_{B'}B [T]_B P_{B,B'}$:

```
In[28]:= Inverse[Q] . TB . Q // MatrixForm
```

```
Out[28]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{31}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{75}{2} & \frac{25}{2} \end{pmatrix}$$

Merk op dat dit ook hetzelfde is als $P_{B'E} [T]_E P_{E,B'}$: schrijf $R=P_{E,B'}$, dan

```
In[30]:= R = {{1, -1}, {3, -1}};
```

en er geldt:

```
In[31]:= Inverse[R].TE.R // MatrixForm
```

```
Out[31]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{31}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{75}{2} & \frac{25}{2} \end{pmatrix}$$

■ Anton-Rorres 8.5.4

```
In[33]:= TB = {{1, 2, -1}, {0, -1, 0}, {1, 0, 7}};
```

```
In[34]:= TB // MatrixForm
```

```
Out[34]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

En nu de overgangsmatrix $P=P_{BB'}$ van B' naar B :

```
In[35]:= P = {{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}};
```

De matrix van T t.o.v. B' is dus

```
In[36]:= Inverse[P].TB.P // MatrixForm
```

```
Out[36]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

■ Anton-Rorres 8.5.12

Als B zo'n basis is, dan is dus de matrix $P_{B,E} [T]_E P_{E,B}$ waarbij E de standaardbasis is en $[T]_E$ de matrix van T t.o.v. E , diagonaal. Je moet dus de eigenvectoren en eigenwaarden van T bepalen.

a.

```
In[39]:= TE = {{-2, 1, -1}, {1, -2, -1}, {-1, -1, -2}};
```

```
In[40]:= Eigensystem[TE]
```

```
Out[40]= {{-3, -3, 0}, {{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}
```

De eerste drie getallen zijn de eigenwaarden, de laatste drie vectoren moeten worden gelezen als KOLOMvectoren en zijn de bijbehorende eigenvectoren. Daarom transponeren:

```
In[41]:= P = Transpose[{{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}]
```

```
Out[41]= {{1, -1, -1}, {0, 1, -1}, {1, 0, 1}}
```

Check:

```
In[42]:= Inverse[P].TE.P
```

```
Out[42]= {{-3, 0, 0}, {0, -3, 0}, {0, 0, 0}}
```

De kolommen van P vormen dus de gevraagde basis.

b.

```
In[43]:= TE = {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 1, 0}};
```

```
In[44]:= Eigensystem[TE]
```

```
Out[44]= {{-2, 1, 1}, {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

Hier zie je dat de eigenwaarde 1 multipliciteit 2 heeft (zowel algebraïsch als meetkundig). In de eigenruimte bij 1 mag je een willekeurige basis kiezen; BIJVOORBEELD de basis die *Mathematica* geeft.

```
In[45]:= P = Transpose[{{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}];
```

Check:

```
In[46]:= Inverse[P].TE.P
```

```
Out[46]= {{-2, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

c.

```
In[47]:= TE = {{4, 0, 1}, {2, 3, 2}, {1, 0, 4}};
```

```
In[48]:= Eigensystem[TE]
```

```
Out[48]= {{5, 3, 3}, {{1, 2, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 1, 0}}}
```

```
In[49]:= P = Transpose[{{1, 2, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 1, 0}}];
```

Check:

```
In[50]:= Inverse[P].TE.P
```

```
Out[50]= {{5, 0, 0}, {0, 3, 0}, {0, 0, 3}}
```

■ Anton-Rorres 8.5.13

Bepaal de matrix van T t.o.v. een basis die je handig vindt: ik vind de basis $1, x, x^2$ leuk, dus

```
In[53]:= TB = {{5, 6, 2}, {0, -1, -8}, {1, 0, -2}};
```

```
In[54]:= Det[λ IdentityMatrix[3] - TB] // Factor
```

```
Out[54]= (-3 + λ)^2 (4 + λ)
```

Dus de lineaire afbeelding heeft eigenwaarden 3, met algebraïsche multipliciteit 2, en -4 met algebraïsche multipliciteit 1. De eigenruimte bij 3 vind je door

```
In[57]:= NullSpace[3 * IdentityMatrix[3] - TB]
```

```
Out[57]= {{5, -2, 1}}
```

Aha, dus de meetkundige multipliciteit van eigenwaarde 3 is slechts 1. De eigenruimte wordt opgespannen door het polynoom $5 - 2x + x^2$.

```
In[60]:= NullSpace[-4 * IdentityMatrix[3] - TB]
```

```
Out[60]= {{-6, 8, 3}}
```

De eigenruimte bij -4 is dus ook 1-dimensionaal, en opgespannen door $-6 + 8x + 3x^2$.

Anton-Rorres 8.5.15

Stel v is een eigenvector van T bij eigenwaarde λ . Dan geldt $Tv = \lambda v$ en dus $(\lambda \text{Id} - T)v = \lambda v - Tv = \lambda v - \lambda v = 0$. Dus v zit in de kern van $\lambda \text{Id} - T$. Bovendien is v niet nul per definitie van eigenvectoren. Omgekeerd, als v in die kern zit en niet nul is, dan geldt $Tv = Tv + (\lambda \text{Id} - T)v = Tv + \lambda v - Tv = \lambda v$ dus v is een eigenvector van T bij eigenwaarde λ .

Merk op dat ik op college, net als hier, de notatie Id of Id_V gebruik voor de identiteitsAFBEELDING van V naar zichzelf. De letter I daarvoor gebruiken, zoals het boek hier doet, is ietwat verwarrend, omdat I ook al voor de identiteitsMATRIX staat.

■ Anton-Rorres 8.6.1

Onto betekent surjectief. $T: V \rightarrow W$ heet surjectief als $R(T) = W$; met andere woorden: als er voor alle w in W een v in V is met $Tv = w$.

- surjectief, want voor alle (x, y) in $\mathbb{R}^2$ is er een vector die door T op (a, b) afgebeeld wordt, namelijk (b, a) . T is hier zelfs bijectief, want $\ker T = 0$, dus T heeft een inverse (namelijk T zelf!).
- niet surjectief, want $R(T)$ is het opspansel van $(0, 1)$, waar (bijvoorbeeld) de vector $(1, 0)$ NIET in zit. Dus om te laten zien dat een afbeelding T NIET surjectief is, hoef je maar EEN vector aan te geven die NIET in $R(T)$ zit.
- wel surjectief, want voor alle (x, y) is er een vector die door T op (a, b) afgebeeld wordt, namelijk $(a+b, a-b)/2$. T is zelfs bijectief, met inverse $T/2$.
- niet surjectief. Dat kan helemaal niet, want de dimensiestelling zegt dat $\dim R(T)$ hier hooguit 2 is (en hij is ook precies 2), terwijl T van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$ gaat.
- idem. (behalve dat hier $R(T)$ zelfs maar 1-dimensionaal is, namelijk opgespannen door $(1, -1, 2)$).
- wel surjectief. Op de vector (a, b) wordt BIJVOORBEELD afgebeeld: $(a+b, a-b, 0)/2$. De afbeelding T is niet bijectief, want niet injectief: de vector $(0, 1, -1)$ spant de kern van T op.

■ Anton-Rorres 8.6.5

- niet bijectief. T kan niet bijectief zijn, want de ruimtes P_2 en P_3 hebben verschillende dimensies (3 respectievelijk 4).
- wel bijectief, met inverse T zelf! Immers, de getransponeerde van de getransponeerde van A is A zelf.
- niet bijectief, want de dimensies komen niet overeen (4 resp. 3)
- niet bijectief, want $\ker T$ is niet $\{0\}$ ---bijvoorbeeld zit het polynoom 1 in de kern.

■ Anton-Rorres 8.6.8

- Je hebt hier heel veel keuze. Maar een makkelijke afbeelding is bijvoorbeeld de afbeelding die de symmetrische matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
 naar de vector (a, b, c, d, e, f) stuurt.

$$\begin{bmatrix} b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

- Weer veel keuze. Bijvoorbeeld de afbeelding die de matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
 naar de vector (a, b, c, d) stuurt (rijgewijs aflezen). Of de afbeelding die de matrix naar de vector (a, c, b, d) stuurt (kolomgewijs aflezen).

c. Een isomorfisme met $\mathbb{R}^n$ kiezen is eigenlijk niets anders dan een basis kiezen. Een geschikte basis van de eerste vectorruimte V is x, x^2, x^3 . En je kunt dus de afbeelding nemen die $ax + bx^2 + cx^3$ naar (a, b, c) stuurt. Maar je had ook een "abstracte" afbeelding kunnen maken: bijvoorbeeld de afbeelding T die p stuurt naar het triple $(p(1), p(2), p(3))$. Om in te zien dat die afbeelding bijectief is, laten we zien dat hij injectief is. Dan volgt namelijk surjectiviteit uit $\dim R(T) + \dim \ker(T) = \dim V = 3$. Stel dus dat $Tp = 0$. Dat betekent dat $p(1) = p(2) = p(3) = 0$. Maar ook $p(0) = 0$ want p in V . Dus p is een polynoom van graad hooguit 3 dat 4 verschillende nulpunten heeft. Dat kan alleen maar als p nul is. Dus $\ker T = \{0\}$ en T is een bijectie.

- Bijvoorbeeld de afbeelding $T: f \rightarrow (f(0), f(\pi/2), f(\pi))$. Om in te zien dat dit een isomorfisme is, schrijf je de matrix T_B, B' op, waarbij B' de gegeven basis $\{1, \sin(x), \cos(x)\}$ is en B de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$:

```
In[63]:= l = {1 &, Sin, Cos}
```

```
Out[63]= {1 &, Sin, Cos}
```

```
In[64]:= A = Table[l[[j]][i Pi / 2], {i, 0, 2}, {j, 1, 3}];
```

```
In[65]:= A // MatrixForm
```

```
Out[65]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[66]:= Det[A]
```

```
Out[66]= -2
```

Dit is niet 0, dus A is inverteerbaar, en daarmee T ook. N.B. Strikt genomen hadden we eerst moeten nagaan dat B' wel een basis is van zijn opspansel, d.w.z. of B' lineair onafhankelijk is, voor we de bovenstaande matrix van T t.o.v. B en B' gingen uitrekenen. Maar merk op dat dat bij nader inzien uit het bovenstaande volgt: als $a*1+b*\sin+c*\cos=0$, and zou gelden $A(a,b,c)^T=0$, en uit het bovenstaande volgt dan dat $a=b=c=0$.

■ Extra opgaven

Opgave 0.1

1. Merk eerst op dat voor $n \times n$ -matrices A,B geldt $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$, en dat dit gelijk is aan $\text{tr}(BA)$. Dat A en C gelijkvormig zijn betekent dat er een inverteerbare P is met $A=PCP^{-1}$. Dit betekent dat $\text{tr}(A)=\text{tr}(PCP^{-1})$. Pas nu de bovenstaande regel toe met A vervangen door PC en B vervangen door P^{-1} . Dan geldt dus blijkbaar $\text{tr}(PCP^{-1})=\text{tr}(P^{-1} - PC)=\text{tr}(I C)=\text{tr}(C)$.

Overigens volgt de uitspraak ook uit het feit dat A en C hetzelfde karakteristieke polynoom hebben: de coefficient van $\lambda^{-(n-1)}$ in dat polynoom is immers precies min het spoor van A, en dus ook min het spoor van C.

2. Op college zagen we al dat $\dim \ker(A)=\dim \ker(C)$. Met de dimensiestelling volgt nu dat $\dim R(A)=n-\dim \ker(A)=n-\dim \ker(C)=\dim R(C)$.

3. Als $C=QBQ^{-1}$, dan geldt $A=PCP^{-1}=PQBQ^{-1}P^{-1}=RBR^{-1}$ met $R=PQ$ (immers, dan $R^{-1}=(PQ)^{-1}=Q^{-1} - P^{-1}$).

Opgave 0.2

Kies een basis $v_1, \dots, v_n$ van V en een basis $w_1, \dots, w_n$ van W (met evenveel elementen, want V en W hebben dezelfde dimensie). Nu hebben we eerder in het college gezien dat er dan een unieke lineaire afbeelding T bestaat met $Tv_i=w_i$ voor $i=1, \dots, n$. Die afbeelding is duidelijk surjectief, want $R(T)$ bevat het opspansel van de basis $w_1, \dots, w_n$ van W. Uit de dimensiestelling volgt dat T ook injectief is, dus T is een isomorfisme.

Opgave 0.3

1.

```
In[69]:= A = {{0, 0, 0, 1/3}, {1/2, 0, 1, 1/3}, {1/2, 0, 0, 1/3}, {0, 1, 0, 0}};
```

```
In[70]:= A // MatrixForm
```

```
Out[70]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Probeer dit zonder te rekenen! Je kunt in 5 stappen van elke i naar elke j komen, dus A^5 heeft alleen maar strikt positieve entries. Check:

```
In[78]:= A.A.A.A.A
```

```
Out[78]= {{1/18, 1/6, 1/9, 5/54}, {7/18, 1/3, 5/18, 43/108}, {5/36, 2/9, 1/9, 19/108}, {5/12, 5/18, 1/2, 1/3}}
```

3.

```
In[86]:= NullSpace[A - IdentityMatrix[4]]
```

```
Out[86]= {{1/3, 1, 1/2, 1}}
```

Dus de eigenruimte bij eigenwaarde 1 is inderdaad 1-dimensionaal, met eigenvector (2,6,3,6)/17 (zo geschaald dat de som 1 is).

4. De sites 2 en 4 zijn dus even populair, gevolgd door 3 en dan 1.

Iets anders: we kunnen even testen dat inderdaad alle andere eigenwaarden in absolute waarde strikt kleiner zijn dan 1:

```
In[88]:= Eigensystem[A] // N
```

```
Out[88]= {{1., -0.305806 + 0.579316 i, -0.305806 - 0.579316 i, -0.388388}, {{0.333333, 1., 0.5, 1.},
{-0.237543 - 0.449999 i, -0.305806 + 0.579316 i, -0.456651 - 0.129317 i, 1.},
{-0.237543 + 0.449999 i, -0.305806 - 0.579316 i, -0.456651 + 0.129317 i, 1.},
{-0.858248, -0.388388, 0.246636, 1.}}
```

```
In[89]:= Abs[%[[1]]]
```

```
Out[89]= {1., 0.655075, 0.655075, 0.388388}
```

Dit zijn de absolute waarden van de eigenwaarden.

Opgave 0.4

1. $R(S)$ bestaat uit alle polynomen p van graad hooguit $n+1$ die door x deelbaar zijn, en dat zijn precies alle polynomen met $p(0)=0$. De polynomen in $R(T)$ voldoen daar duidelijk ook aan, omdat ze de integraal VANAF 0 van een ander polynoom zijn. Omgekeerd, als $p(0)=0$, dan geldt $p=T(p')$ waarbij p' de afgeleide van p is. Dus inderdaad bestaat ook $R(T)$ uit alle polynomen deelbaar door x .

2. Als $x p(x)=0$ voor alle x dan $p=0$. (Strikt genomen: dan zeker $p(x)=0$ voor alle x ongelijk 0, en dus vanwege continuïteit $p(x)=0$ voor alle x .) Dus $\ker S=\{0\}$. Als $T p=0$, dan geldt zeker $p=(T p)'=0$. Dus ook $\ker T=\{0\}$.

3. We zoeken polynomen die door eerst te integreren vanaf 0 en dan te delen door x op een scalair veelvoud van zichzelf worden afgebeeld. De polynomen $1, x, x^2, \dots, x^n$ voldoen daar zeker aan, met de scalars $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(n+1)$. Dus dit zijn zeker eigenvectoren resp. eigenwaarden van $S^{(-1)} T$. Omdat ze P_n al opspannen, zijn er geen andere eigenwaarden of eigenvectoren.