

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

28 juni 2007

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer al uw antwoorden.

Voor elk onderdeel van de vragen kunt u 3 punten verdienen. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, 1 bij het resultaat op te tellen en af te ronden.

1. In deze opgave hebben de begrippen “orthogonaal” en “afstand” betrekking op het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$. Bekijk het kwadratische oppervlak K in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 1\};$$

dit is een hyperbool.

- (a) Vind een orthogonale matrix P en positieve reële getallen λ, μ zo dat in de coördinaten u, v vastgelegd door

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

de vergelijking voor K er uitziet als $\lambda u^2 - \mu v^2 = 1$.

- (b) Bepaal de (x, y) -coördinaten van beide punten van K op minimale afstand van de oorsprong.

2. Bekijk het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(t). \quad (*)$$

(Dit stelsel beschrijft de beweging van een harmonische oscillator met eigenfrequentie $2 = \sqrt{4}$ en een externe aandrijfversnelling met amplitude 3 en frequentie 1.)

- (a) Vind de algemene *reële* oplossing van het stelsel (??). Hint: vind een particuliere oplossing van de vorm

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{bmatrix} \text{ met } a, b \in \mathbb{R}.$$

- (b) Welke oplossing van (??) voldoet aan $x(0) = 2$ en $y(0) = 4$?

3. Op de ruimte $P_2(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ van reële polynomen in x van graad ≤ 2 is de volgende afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ gedefinieerd:

$$(Tp)(x) := (x + 1) \cdot p'(x), \text{ waar } p' \text{ de afgeleide van } p \text{ is;}$$

dus als bijvoorbeeld $p(x) = 2x$, dan $(Tp)(x) = (x + 1) \cdot 2$.

- (a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
 - (b) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis $\{1, x, x^2\}$.
 - (c) Vind de eigenwaarden van T en de bijbehorende eigenruimten.
4. In $\mathbb{C}^3$ wordt de twee-dimensionale deelruimte V opgespannen door $(1, i, 1)$ en $(i, 1, i)$.
- (a) Vind een orthonormale basis van V ten opzichte van het standaard inproduct $\underline{u} \cdot \underline{v} := \sum_{k=1}^3 u_k \overline{v_k}$ op $\mathbb{C}^3$.
 - (b) Bereken de orthogonale projectie van $(1, 0, 0)$ op de ruimte V .
5. We willen rijtjes tellen die bestaan uit cijfers in $\{0, \dots, 6\}$ en de eigenschap hebben dat van elk tweetal opeenvolgende cijfers er minstens één nul is. Laat a_n het aantal zulke rijtjes ter lengte n zijn die op een cijfer ongelijk aan 0 eindigen, en b_n het aantal zulke rijtjes die op 0 eindigen. Er geldt bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \text{ (de rijtjes } (1), (2), (3), (4), (5), (6)), \\ a_2 &= 6 \text{ (de rijtjes } (0, k) \text{ met } k = 1, \dots, 6), \\ b_1 &= 1 \text{ (het rijtje } (0)) \text{ en} \\ b_2 &= 7 \text{ (de rijtjes } (k, 0) \text{ met } k = 0, \dots, 6). \end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \text{ voor alle } n \geq 1, \text{ waar } A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Hint: een toegestaan rijtje ter lengte $n + 1$ dat op een cijfer ongelijk aan nul eindigt moet op de n -de—voorlaatste—positie een 0 hebben staan.)

- (b) Bereken A^7 , maar *zonder* eerst A^2, A^3 enzovoorts uit te rekenen. Een antwoord zonder berekening levert geen punten op.
- (c) Bereken hiermee a_8 en b_8 .