

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Augustus 2005

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden.

Voor elk onderdeel van de vragen kunt u 3 punten verdienen; één punt krijgt u cadeau. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden, eventueel na verrekening van een bonus.

1. De afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 1, 0) &= (8, 2, 5), \\ \mathcal{A}(1, 0, 1) &= (4, 4, 6), \\ \mathcal{A}(0, 1, 1) &= (2, 2, 3).\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de matrix van de afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis.
- (b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van $\mathcal{A}$.
- (c) Bepaal alle vectoren $x \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt dat $\mathcal{A}(x) = (7, 4, 7)$.

2. Voor de orthogonale afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ geldt:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 0, 0) &= (1/3, 2/3, 2/3); \\ \mathcal{A}(0, 1, -1) &= (0, -1, 1);\end{aligned}$$

- (a) Toon aan dat het vlak $x_2 - x_3 = 0$ invariant is onder $\mathcal{A}$.
- (b) Laat zien dat $\mathcal{A}(0, 1, 1) = \pm(-4/3, 1/3, 1/3)$.
- (c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis, als verder geven is dat $\det(\mathcal{A}) = -1$.

3. (a) Bepaal de reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}$$

onder de beginvoorwaarden $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Bepaal een functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ waarvan de Laplace-getransformeerde $F = \mathcal{L}(f)$ voldoet aan

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 5}{s^3 - 3s^2 + 4}.$$

4. In $\mathbb{R}^2$ wordt de ellips K beschreven door de vergelijking

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 30.$$

- (a) Bepaal de vergelijking van de kromme K op hoofdassen.
- (b) Welke punten (in (x_1, x_2) -coördinaten) van K liggen op minimale afstand van de oorsprong $(0, 0)$?

5. Zij V een reële vectorruimte. Stel $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van V naar V .

Bewijs of weerleg de volgende beweringen.

- (a) Als $v \in V$ een eigenvector van $\mathcal{A}$ is, dan is v ook een eigenvector van $\mathcal{A}^2$.
- (b) Als $v \in V$ een eigenvector van $\mathcal{A}^2$ is, dan is v ook een eigenvector van $\mathcal{A}$.

Tabel Laplace-transformaties

$$F(s) := (\mathcal{L}f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Voor alle $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{R}$ geldt

$f(t)$	$F(s)$	convergentie-abscis
e^{at}	$(s - a)^{-1}$	$\operatorname{Re}(a)$
$t^n/n!$	s^{-n-1}	0
$t^n e^{at}/n!$	$(s - a)^{-n-1}$	$\operatorname{Re}(a)$
$\cos(bt)$	$(s^2 + b^2)^{-1} s$	0
$\sin(bt)$	$(s^2 + b^2)^{-1} b$	0
$e^{at} \cos(bt)$	$((s - a)^2 + b^2)^{-1} (s - a)$	$\operatorname{Re}(a)$
$e^{at} \sin(bt)$	$((s - a)^2 + b^2)^{-1} b$	$\operatorname{Re}(a)$