

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

16 juni 2005

Tentamen Lineaire Afbeeldingen (2DN02).

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden.

Voor elk onderdeel van de vragen kunt u 3 punten verdienen; één punt krijgt u cadeau. Het eindcijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden, eventueel na verrekening van een bonus.

-
1. De afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 1, 0) &= (2, 1, -1), \\ \mathcal{A}(1, 0, 2) &= (5, 6, 7), \\ \mathcal{A}(0, 1, 1) &= (0, -2, -2).\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de matrix van de afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaard basis.
 - (b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van $\mathcal{A}$.
 - (c) Bepaal alle onder $\mathcal{A}$ invariante deelruimten van $\mathbb{R}^3$.
2. Van de orthogonale afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven dat zij op het vlak V met vergelijking $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ een draaiing over een hoek ter grootte $\pi/2$ induceert.
- (a) Laat zien dat

$$\mathcal{A}(0, 1, 1) = (4/3, -1/3, 1/3) \text{ of } \mathcal{A}(0, 1, 1) = (-4/3, 1/3, -1/3).$$

- (b) Bepaal de loodrechte projectie van $(1, 3, -1)$ op het vlak V .
 - (c) Bepaal zowel $\mathcal{A}(0, 1, 1)$ als ook $\mathcal{A}(1, 2, -2)$ met behulp van het extra gegeven dat $\mathcal{A}(1, 3, -1) = (1/3, -7/3, 7/3)$.
 - (d) Bepaal $\mathcal{A}(4, 2, 4)$.
3. (a) Bepaal de reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$\text{onder de beginvoorwaarden } \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z.O.Z.

- (b) Bepaal een functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ waarvan de Laplace-getransformeerde $F = \mathcal{L}(f)$ voldoet aan

$$F(s) = \frac{s^2 - 3}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}.$$

4. In $\mathbb{R}^2$ wordt de ellips K beschreven door de vergelijking

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 9.$$

- (a) Bepaal de vergelijking van de kromme K op hoofdassen.
 (b) Bepaal in (x_1, x_2) -coördinaten de twee punten van K die op maximale afstand van elkaar liggen.
5. Zij V een reële inproductruimte. Stel $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen van V naar V .

Bewijs of weerleg de volgende beweringen.

- (a) Als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ orthogonaal zijn, dan is $\mathcal{AB}$ dat ook.
 (b) Als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ symmetrisch zijn, dan is $\mathcal{AB}$ dat ook.

Tabel Laplace-transformaties

$$F(s) := (\mathcal{L}f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Voor alle $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{R}$ geldt

$f(t)$	$F(s)$	convergentie-abscis
e^{at}	$(s - a)^{-1}$	$\operatorname{Re}(a)$
$t^n/n!$	s^{-n-1}	0
$t^n e^{at}/n!$	$(s - a)^{-n-1}$	$\operatorname{Re}(a)$
$\cos(bt)$	$(s^2 + b^2)^{-1} s$	0
$\sin(bt)$	$(s^2 + b^2)^{-1} b$	0
$e^{at} \cos(bt)$	$((s - a)^2 + b^2)^{-1} (s - a)$	$\operatorname{Re}(a)$
$e^{at} \sin(bt)$	$((s - a)^2 + b^2)^{-1} b$	$\operatorname{Re}(a)$