

Disclaimer: ik schrijf hier geen uitgewerkte oplossingen; open vragen op het tentamen moeten uitgebreider beantwoord worden.

- (1) Antwoord: a. De kolommen van deze matrix drukken de vectoren in B_1 uit t.o.v. B_2 ; bijvoorbeeld: $(2/4)(0, 1, 1) - (1/4)(1, 2, -1) + (5/4)(1, 0, 1) = (1, 0, 2)$, de eerste vector van B_1 .
- (2) Antwoord: b. Gebruik ofwel de algemene strategie, die zegt dat je de matrix $\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$ moet diagonaliseren, of je gezond verstand: de vergelijking kan geschreven worden als $(4x - 3y)^2 - 10(3x - 4y) = 0$, ofwel, met $u = 4x - 3y$ en $v = 10(3x - 4y)$ staat er $u^2 = v$, een parabool.
- (3) Antwoord: a. De z -as, opgespannen door $(0, 0, 1)$, is een eigenvector bij eigenwaarde 1. Antwoord c is onzin, antwoord b is fout omdat bij $\phi = \pi$ de afbeelding een tweedimensionale eigenruimte bij eigenwaarde -1 heeft, namelijk het x/y -vlak (check!).
- (4) Antwoord: a. Gewoon rekenen.
- (5) Antwoord: a. Het karakteristieke polynoom is $(\lambda - 1)\lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$, en een $n \times n$ -matrix met verschillende eigenwaarden is altijd diagonaliseerbaar. De matrix bij b is het niet, want 1 heeft algebraïsche multipliciteit 2 maar slechts een 1-dimensionale eigenruimte. Ter herinnering: een matrix is diagonaliseerbaar als en alleen als de algebraïsche multipliciteit van elke eigenwaarde gelijk is aan de meetkundige multipliciteit (de dimensie van de bijbehorende eigenruimte).
- (6) Antwoord: b. Dat volgt uit de laatste opmerking bij het vorige antwoord: alle algebraïsche multipliciteiten zijn in dit geval 1, en de meetkundige multipliciteit van elke eigenwaarde is minstens 1 (en hooguit de algebraïsche multipliciteit). De andere uitspraken zijn allebei onwaar; voor allebei is de identiteitsmatrix een tegenvoorbeeld.
- (7) Antwoord: c. De afbeelding a niet, want bijvoorbeeld $T(1, 1) = (5, 1, 1)$ en $T(2, 2) = (10, 4, 2) \neq 2T(1, 1)$, en bij b kun je je zelfs afvragen of die afbeelding wel goed gedefinieerd is; wat is bijvoorbeeld $(-1)^{1/2}$?
- (8) Antwoord: b. Deze was door velen fout gemaakt. Om te beginnen: het gaat hier om de afbeelding “vervang x in p door $x + 1$ ”, niet “vermenigvuldig p met $(x + 1)$ ”. De matrix van T ten opzichte van de basis $1, x, x^2$ is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(want 1 gaat naar 1, x naar $x+1$, x^2 naar x^2+2x+1). Hieruit lees je meteen af dat $\det(\lambda I - T) = (\lambda - 1)^3$ (want het is een bovendriehoeksmatrix). Dus de uitspraak bij c is waar: 1 heeft algebraïsche multipliciteit 3. De uitspraak bij a is ook waar: de matrix heeft geen eigenwaarde 0 en is dus inverteerbaar. De uitspraak bij b is niet waar: de eigenruimte bij eigenwaarde 1 is maar 1-dimensionaal, en bestaat uit de constante polynomen; zie de eerste kolom van de matrix hierboven.

- (9) Antwoord: b. Deze opgave was ook door velen fout gemaakt. Gegeven is dat van de drie matrices er twee van de vorm $[T]_B$ en $[T]_{B'}$ zijn, dus matrices van dezelfde, niet nader gespecificeerde, lineaire afbeelding T , ten opzichte van de bases B en B' . Als nu $P = [I]_{B', B}$ de overgangsmatrix van B naar

B' is, dan volgt $[T]_{B'} = P[T]_B P^{-1}$, met andere woorden, $[T]_{B'}$ en $[T]_B$ zijn gelijkvormig (dit heet ook wel geconjugeerd). In het bijzonder moeten ze hetzelfde spoor hebben. Maar dat helpt niet, want alledrie de matrices hebben spoor -1 . Maar ze moeten ook dezelfde determinant hebben. En nu blijkt dat de matrices bij a en c determinant -2 hebben, terwijl die bij b determinant $-3/4$ heeft. Dus moet b wel het goede antwoord zijn.

Ter controle: als je de matrix bij c diagonaliseert vind je inderdaad de matrix bij a.

- (10) Antwoord: c. T is niet injectief, want symmetrische matrices worden op nul afgebeeld (de nulruimte, of kern, van T bestaat precies uit alle symmetrische matrices). T is ook niet surjectief. Dat volgt bijvoorbeeld uit de dimensieformule en het feit dat de nulruimte niet $\{0\}$ is, of ook direct: het beeld van T bevat alleen matrices B met de eigenschap dat $B^T = -B$ (immers, $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$), en dat zijn niet alle matrices.