

EEN AANTAL EXTRA OPGAVEN VOOR 2WC15, DEEL 2

JAN DRAISMA

Opgave 0.1. Laat f en g twee polynomen zijn in $K[x, y]$, zij $\leq$ een monomiale ordening op $M(x, y) = \{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, en neem aan dat $\text{lm}(f) = x^m$ voor zekere m en $\text{lm}(g) = y^n$ voor zekere n . Bewijs dat $\{f, g\}$ een Gröbnerbasis is van het ideaal dat ze voortbrengen.

Opgave 0.2. Bepaal met behulp van Singular alle oplossingen in $\mathbb{C}$ van het stelsel

$$xy - x - 2y + 2 = 0$$

$$x^2 + xy - 2x = 0$$

Opgave 0.3. Zij S het beeld van de afbeelding $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ gegeven door

$$(u, v) \mapsto (x, y, z) = (uv, uv^2, u^2).$$

- (1) Bepaal het ideaal $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ van alle polynomen die overal op S nul zijn.
- (2) Bepaal alle punten in $V(\mathcal{I}(S))$ die niet in S zitten.

Opgave 0.4. Bekijk de vlakke robotarm in Figuur 1. Die bestaat uit twee stugge delen. Het eerste deel heeft lengte 2 en kan om de oorsprong draaien. De coördinaten van het eindpunt heten x en y . Het tweede deel zit daar aan vast, kan om (x, y) heen draaien en heeft lengte 1. De coördinaten van het eindpunt daarvan heten z en w .

- (1) Geef alle vergelijkingen waar het viertal (x, y, z, w) aan voldoet.
- (2) Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem? Ga met Singular na of dit overeenkomt met de dimensie van de variëteit gegeven door de vergelijkingen uit het vorige onderdeel. (Het commando voor dimensie in Singular is `dim`, maar probeer het ook als volgt te doen: bereken een Gröbnerbasis voor het ideaal I uit het vorige onderdeel ten opzichte van $\mathbf{dp}$ —degree-lexicographic. Onthoud van de elementen in de Gröbnerbasis alleen de leidende monomen; deze brengen een monomiaal ideaal J voort. Bepaal een verzameling $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ van maximale kardinaliteit met $\mathbb{N}^S \subseteq C_J$.)

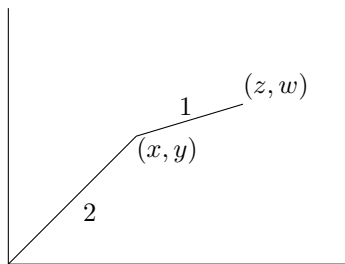


FIGURE 1. Een vlakke robotarm.

Opgave 0.5. Laat d een natuurlijk getal zijn en neem $m := \binom{d}{2}$, zodat m het aantal paren $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ is met $i + j \leq d$. Zij $A \in \mathbb{N}^{2 \times m}$ een matrix waarin voor elk zulk paar (i, j) de kolom $(i, j)^T$ precies 1 keer in A voorkomt.

- (1) Neem $d = 2, 3, 4$ en bepaal Markovbases voor A met Singular.
- (2) Bepaal een Markovbasis voor algemene d .

Opgave 0.6. Bereken met Singular voortbrengers voor het ideaal van het beeld van de afbeelding $\mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, $(m, n) \mapsto (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

Opgave 0.7. Zij $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ een polynoom van graad d . Bepaal het Hilbert-polynoom h_I van het ideaal $I = \langle f \rangle$.