

Discrete Wiskunde
2WC15, Lente 2010

Jan Draisma

HOOFDSTUK 5

Dimensie

Dit hoofdstuk is bijna uitsluitend gebaseerd op Hoofdstuk 9 van *Ideals, Varieties, and Algorithms*.

1. Monomiale idealen

Laat $I \subseteq K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$ een *monomiaal ideaal* zijn, d.w.z. dat het voortgebracht wordt door (eindig veel) monomen x^α met $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Voor $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ definiëren we

$$H_S := \{p \in K^n \mid p_i = 0 \text{ voor alle } i \in S\};$$

dit is een lineaire deelruimte van K^n .

LEMMA 1.1. *De variëteit $V(I)$ is de vereniging $H_{S_1} \cup \dots \cup H_{S_k}$ voor geschikte deelverzamelingen $S_1, \dots, S_k \subseteq \{1, \dots, n\}$. We mogen zelfs eisen dat $S_a \not\subseteq S_b$ voor alle $a \neq b$, en dan zijn de S_a op volgorde na uniek.*

We definiëren alvast $\dim V(I)$ als het maximum van de dimensies der H_{S_a} , dus als $n - \min_a |S_a|$. We zullen zien dat dit strookt met een algemenere definitie van dimensie verderop. Zij $C_I := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid x^\alpha \notin I\}$, en voor $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ schrijf $\mathbb{N}^S$ voor de verzameling van alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ met $\alpha_i = 0$ voor alle $i \notin S$.

LEMMA 1.2. *De dimensie $\dim V(I)$, zoals hierboven gedefinieerd, is gelijk aan*

$$\max\{|S| \mid \mathbb{N}^S \subseteq C_I\}.$$

BEWIJS. Er geldt $\mathbb{N}^S \subseteq C_I$ als en alleen als $H_{S^c} \subseteq V(I)$. □

LEMMA 1.3. *De verzameling C_I is een eindige, disjuncte vereniging van verzamelingen van de vorm $\beta + \mathbb{N}^S$ met $\beta \in \mathbb{N}^n$ en $S \subseteq \{1, \dots, n\}$.*

BEWIJS. Schrijf $I_0 := I$. We gaan een rij $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k = \langle 1 \rangle$ van monomiale idealen construeren met de eigenschap dat $C_{I_a} \setminus C_{I_{a+1}}$ van de vorm $\beta + \mathbb{N}^S$ is voor geschikte $\beta \in \mathbb{N}^n$ en $S \subseteq \{1, \dots, n\}$. Zolang $I_a \neq \langle 1 \rangle$ is, bekijk alle paren (β, S) met de eigenschap dat enerzijds $\beta + \mathbb{N}^S \subseteq C_{I_a}$ en anderzijds $\beta + \mathbb{N}^{S'} \not\subseteq C_{I_a}$ voor alle $S' \supsetneq S$. Onder zulke paren kies een paar (β_0, S) met S *minimaal*. Dit impliceert dat voor alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ waarvoor $\beta_0 + \gamma$ in C_I zit, de hele verzameling $\beta_0 + \gamma + \mathbb{N}^S$ in C_I bevat is. Neem voor het gemak aan dat $S = \{1, \dots, l\}$. Als $l \neq n$, dan zij $d \in \mathbb{N}$ maximaal met de eigenschap dat $\beta_0 + d e_{l+1} \in C_{I_a}$ —zo'n d bestaat, want anders gold $\beta_0 + \mathbb{N}^{S \cup \{l+1\}} \subseteq C_I$. Schrijf $\beta_1 := \beta_0 + d e_{l+1}$; er geldt $\beta_1 + \mathbb{N}^S \subseteq C_I$ maar $\beta_1 + e_{l+1} \notin C_I$. Ga zo door met de coördinaten $l+2, \dots, n$ tot je een β_{n-l} gevonden hebt waarvoor geldt dat $\beta_{n-l} + \mathbb{N}^S \subseteq C_I$ maar $\beta_{n-l} + e_i \notin C_I$ voor alle $i \notin S$. Definieer I_{a+1} als het ideaal dat door I_a en $x^{\beta_{n-l}}$ voortgebracht wordt.

Er geldt $C_{I_a} \setminus C_{I_{a+1}} = \beta_{n-l} + \mathbb{N}^S$. Tenslotte volgt uit Hilberts Basisstelling dat de rij strict stijgende idealen $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots$ ergens moet ophouden, dus met $I_k = \langle 1 \rangle$. $\square$

STELLING 1.1. *Er bestaat een polynoom $h_I(T) \in \mathbb{Q}[T]$ met de eigenschap dat*

$$C_I^{\leq e} := \{\alpha \in C_I \mid \sum_i \alpha_i \leq e\}$$

voor e groot genoeg kardinaliteit $h_I(e)$ heeft.

Dit polynoom is uniek (want het ligt voor oneindig veel waarden vast) en heet het (affiene) *Hilbertpolynoom* van I .

BEWIJS. Vanwege het voorgaande lemma hoeft je alleen te bewijzen dat

$$(\beta + \mathbb{N}^S)^{\leq e}$$

voor grote e polynomiaal in e is. En dat is zo, want als $e \geq \sum_i \beta_i =: d$ is, dan is het aantal punten in voorgaande verzameling gelijk aan $\binom{|S|+(e-d)}{|S|}$, een polynoom van graad $|S|$ in e . $\square$

LEMMA 1.4. *De dimensie van $V(I)$, zoals hierboven gedefinieerd, is gelijk aan de graad van $h_I(T)$.*

2. Algemene idealen

Zij nu I een ideaal in $K[x_1, \dots, x_n]$ dat niet noodzakelijkerwijs monomiaal is.

STELLING 2.1. *Er bestaat een polynoom $h_I(T) \in \mathbb{Q}[T]$ met de eigenschap dat voor alle groot genoeg $e \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\dim K[x]^{\leq e} - \dim(K[x]^{\leq e} \cap I) = h_I(e),$$

waarbij $K[x]^{\leq e}$ de ruimte van alle polynomen van totale graad hooguit e is.

Merk op dat als I monomiaal is, het in de vorige paragraaf gedefinieerde Hilbertpolynoom van I voldoet. Het bewijs van deze stelling geeft indirect een algoritme om h_I te vinden.

BEWIJSSCHETS. Kies een monomiale ordening die de graad respecteert, d.w.z. met de eigenschap dat $x^\alpha < x^\beta$ als $\sum_i \alpha_i < \sum_i \beta_i$. De ordening *deglex* voldoet daar bijvoorbeeld aan (maar de lexicografische ordening niet). Zij J het ideaal in $K[x]$ dat door alle leidende monomen $\text{lm}(f)$, $f \in I$ opgespannen wordt. We bewijzen dat voor alle e geldt

$$\dim(K[x]^{\leq e} \cap I) = \dim(K[x]^{\leq e} \cap J).$$

Laat namelijk $m_1 < \dots < m_k$ de monomen van de vorm $\text{lm}(f)$ met $f \in K[x]^{\leq e} \cap I$ zijn. Kies $f_1, \dots, f_k \in I$ met $\text{lm}(f_i) = m_i$. Dan volgt eenvoudig dat $f_1, \dots, f_k$ een basis vormen van de ruimte $K[x]^{\leq e} \cap I$ en dat $m_1, \dots, m_k$ een basis vormen van de ruimte $K[x]^{\leq e} \cap J$. Om bijvoorbeeld dat laatste in te zien, neem aan dat er een $f \in K[x]^{\leq e} \cap J$ die geen lineaire combinatie van de m_i is, en kies zo'n f met $\text{lm}(f)$ minimaal. Per definitie van J is er een $g \in I$ met $\text{lm}(g) = \text{lm}(f)$. In het bijzonder is de graad van $\text{lm}(g)$ hooguit e , en omdat de monomiale ordening de

graad respecteert hebben alle termen van g graad hooguit e . Dus $g \in K[x]^{\leq e} \cap I$ en $\text{lm}(g) = \text{lm}(f)$ is gelijk aan zekere m_i . Maar dan is $f - \text{lc}(f)m_i$ een element van

$$K[x]^{\leq e} \cap J \setminus Km_1 \oplus \dots \oplus Km_k$$

van lagere graad dan f , tegenspraak. We concluderen dat het Hilbertpolynoom van J de gewenste eigenschap voor I heeft. $\square$

DEFINITIE 2.1. De dimensie van een affiene variëteit $V \subseteq K^n$ is per definitie de graad van het Hilbertpolynoom van $\mathcal{I}(V)$.

OPGAVE 2.2. Zij I voortgebracht door een enkel polynoom van graad d . Bepaal de leidende term (dus graad en coëfficiënt) van $h_I(T)$.

OPMERKING 2.3. Als K algebraïsch gesloten is en $I \subseteq K[x]$ een ideaal is, dan is de graad van H_I gelijk aan de graad van $H_{\sqrt{I}}$, en dus gelijk aan $\dim V(I)$.