

**OPGAVEN DISCRETE WISKUNDE, DAM-DEEL, 18 FEBRUARI
2009**

TER HERINNERING

Laat K een deellichaam van L zijn. We definiëren “Cirkels” als deelverzamelingen van $\mathbb{P}^1 L$ van de vorm $g\mathbb{P}^1 K$ met $g \in \mathrm{GL}_2(L)$. Als $K = \mathbb{R}$ en $L = \mathbb{C}$ dan zijn dit precies de Cirkels, d.w.z. cirkels of lijnen (de laatste met oneindig toegevoegd) in de complexe getallen, ofwel verzamelingen van de vorm

$$\{(z_0 : z_1) \mid \underline{z} = (z_0, z_1)^T \text{ voldoet aan } \underline{z}^* A \underline{z} = 0\}$$

waarbij $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ een Hermitische matrix is ($A^* = A$) met negatieve determinant.

OPGAVEN

- (1) Aan welke eis moet A hierboven verder voldoen opdat het punt $0 = (0 : 1)$ niet op de cirkel ligt? Bewijs hiermee dat inversie (de Möbiustransformatie $z \mapsto 1/z$) Cirkels niet door 0 naar Cirkels niet door 0 stuurt.
- (2) Laat K een deellichaam zijn van L . Laat x, y, u verschillende punten op $\mathbb{P}^1 L$ zijn. Laat zien dat er een unieke “Cirkel” is die x, y, u bevat, en dat deze gelijk is aan

$$\{v \in \mathbb{P}^1 L \mid \mathrm{CR}(x, y; u, v) \in \mathbb{P}^1(K)\}$$

Verdere opgaven: 3.2.4, 1.4.2.