

TER HERINNERING

Definition 0.1. Een *affien vlak* is een drietal $(P, L, *)$ waarbij P en L verzamelingen zijn en $*$ een relatie tussen P en L is (strikt genomen dus een deelverzameling van $P \times L$, maar we schrijven $p * l$ als en alleen als (p, l) in die deelverzameling zit) en waarvoor drie axioma's gelden:

- (1) Voor elk tweetal punten $p \neq q$ (d.w.z. elementen van P) is er een unieke lijn l (d.w.z. element van L) met $p * l$ en $q * l$.
- (2) Voor elk punt p en elke lijn l niet door p is er een unieke lijn m met $p * m$ en $m // l$. Hier betekent $m // l$ dat $m = l$ of er is geen enkel punt q met $q * l$ en $q * m$.
- (3) Er bestaan drie punten die niet op 1 lijn liggen.

Definition 0.2. Een *projectief vlak* is een drietal $(P, L, *)$ waarbij P en L verzamelingen zijn en $*$ een relatie tussen P en L is waarvoor drie axioma's gelden:

- (1)' Voor elk tweetal punten $p \neq q$ (d.w.z. elementen van P) is er een unieke lijn l (d.w.z. element van L) met $p * l$ en $q * l$.
- (2)' Voor elk tweetal lijnen $l \neq m$ is er een uniek punt p met $p * l$ en $p * m$.
- (3)' Er bestaan vier punten waarvan er geen drie op 1 lijn liggen.

OPGAVEN

Exercise 0.3. (1) Bewijs dat in een affien vlak alle lijnen evenveel punten hebben.

- (2) Bewijs dat in een projectief vlak door alle punten evenveel lijnen gaan, en dat dit aantal ook de orde van het vlak plus 1 is.

Exercise 0.4. (1) Bewijs dat als we in een projectief vlak de rollen van P en L omdraaien we weer een projectief vlak hebben. Dit heet het *duale* projectieve vlak.

- (2) Bewijs dat het duale vlak van het Fano vlak isomorf is met het Fano vlak zelf.

Exercise 0.5. Het *affiene Moultonvlak* heeft als puntenverzameling $P = \mathbb{R}^2$ en als lijnenverzameling de gebruikelijke rechte lijnen, behalve dat de lijnen $y = ax + b$ met negatieve richtingscoëfficiënt $a < 0$ naar beneden afgebogen worden bij de y -as, d.w.z. die worden van de vorm

$$\{(x, y) \mid (y = ax + b \text{ en } x \leq 0) \text{ of } (y = 2ax + b \text{ and } x \geq 0)\}$$

voor zekere $a < 0$ en $b \in \mathbb{R}$. Laat zien dat dit een affien vlak is. Bewijs dat het *niet* isomorf is met het standaard affiene $\mathbb{R}^2$ met alle rechte lijnen. (Hint: laat zien dat Desargues' stelling niet geldt in het Moultonvlak.)

Exercise 0.6. Kun je een affien vlak van orde 3 vinden? D.w.z. met 3 punten op elke lijn.

Verdere opgaven:

- Opgave 3.2 uit het dictaat.
- Opgave 4.3 uit het dictaat. Dit is de Kit-Katopgave!