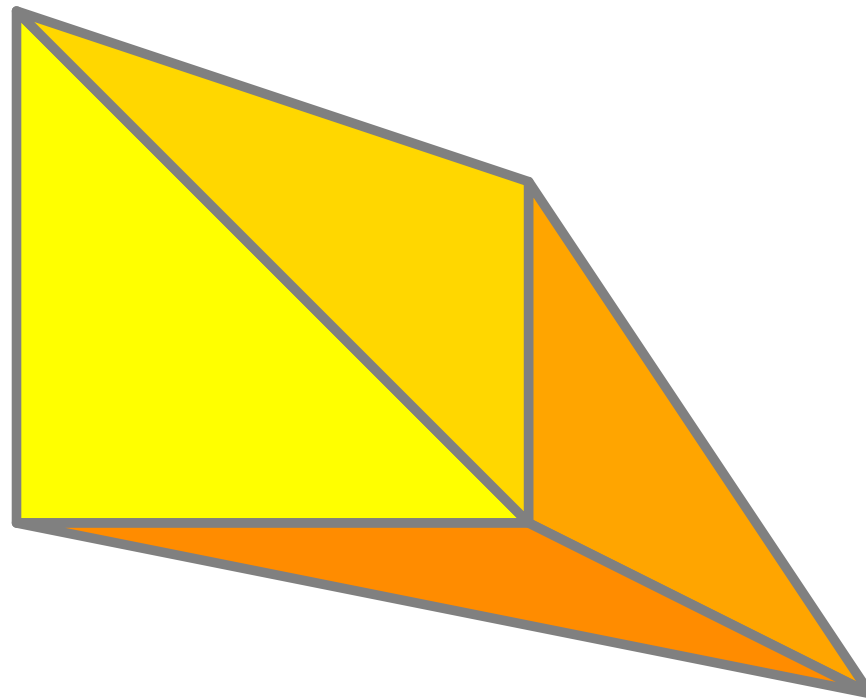


Tropische Meetkunde



In Perspectief, 21 maart 2014

Jan Draisma, TU Eindhoven

Twee operaties

$$\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$a \oplus b := \min\{a, b\}$$

$$a \odot b := a + b$$

het *tropische semilichaam*

(alternatief: $\max$ en $-\infty$)

Twee operaties

$$\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$a \oplus b := \min\{a, b\}$$

$$a \odot b := a + b$$

het *tropische semilichaam*

(alternatief: $\max$ en $-\infty$)

Eigenschappen

$$3 \oplus 2 = 2, \quad 3 \odot 2 = 5,$$

$$a \oplus \infty = a, \quad a \odot 0 = a, \quad a \odot \infty = \infty$$

$$a \odot (b \oplus c) = a + \min\{b, c\} = \min\{a + b, a + c\} = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

Twee operaties

$$\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$a \oplus b := \min\{a, b\}$$

$$a \odot b := a + b$$

het *tropische semilichaam*

(alternatief: $\max$ en $-\infty$)

Eigenschappen

$$3 \oplus 2 = 2, \quad 3 \odot 2 = 5,$$

$$a \oplus \infty = a, \quad a \odot 0 = a, \quad a \odot \infty = \infty$$

$$a \odot (b \oplus c) = a + \min\{b, c\} = \min\{a + b, a + c\} = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

$\rightsquigarrow (\mathbb{R}_\infty, \oplus, \infty, \odot, 0)$ heeft alle eigenschappen van een lichaam, behalve dat additieve inverses ontbreken

Tropische veeltermen in één variabele

$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

*tropische veeltermen kunnen tropisch
worden opgeteld en vermenigvuldigd*

$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

*tropische veeltermen kunnen tropisch
worden opgeteld en vermenigvuldigd*

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

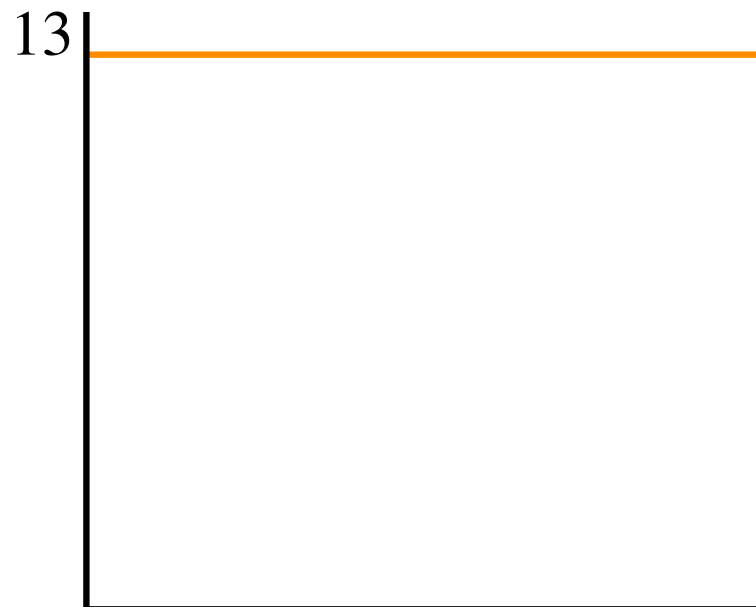
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

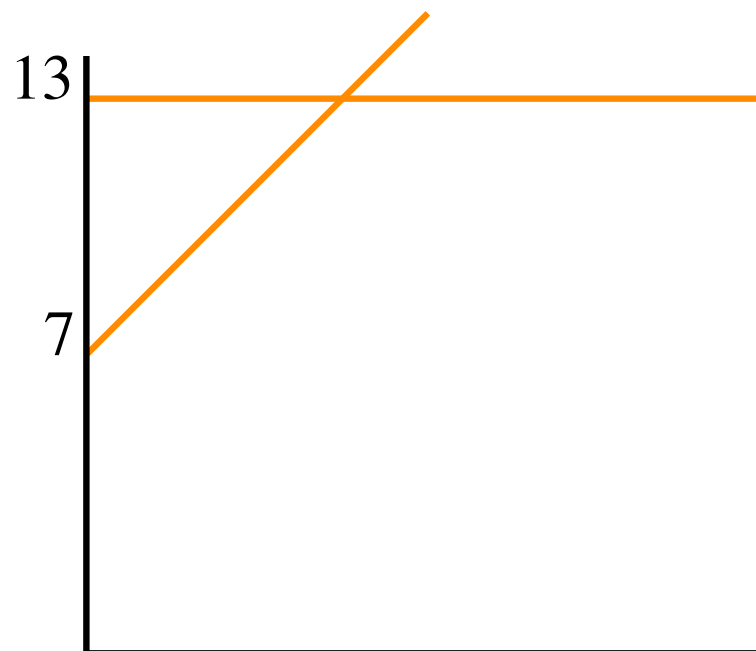
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

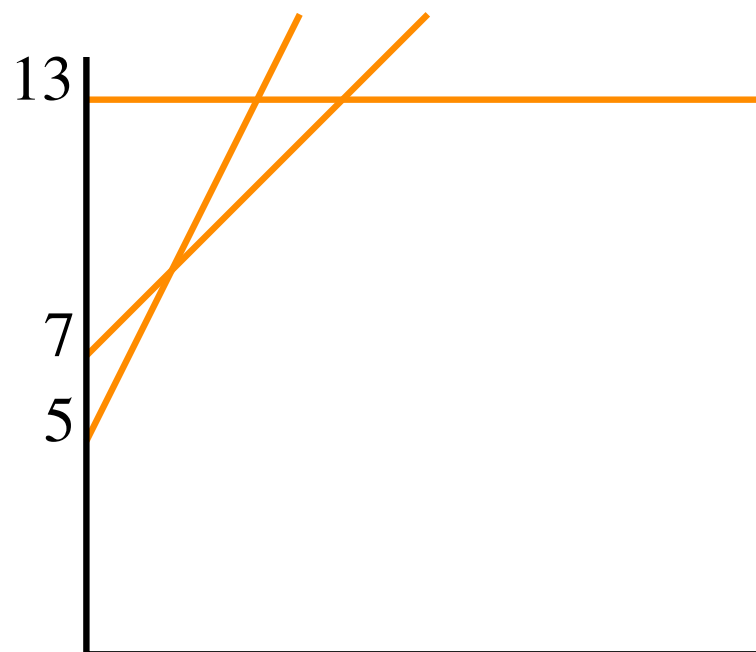
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

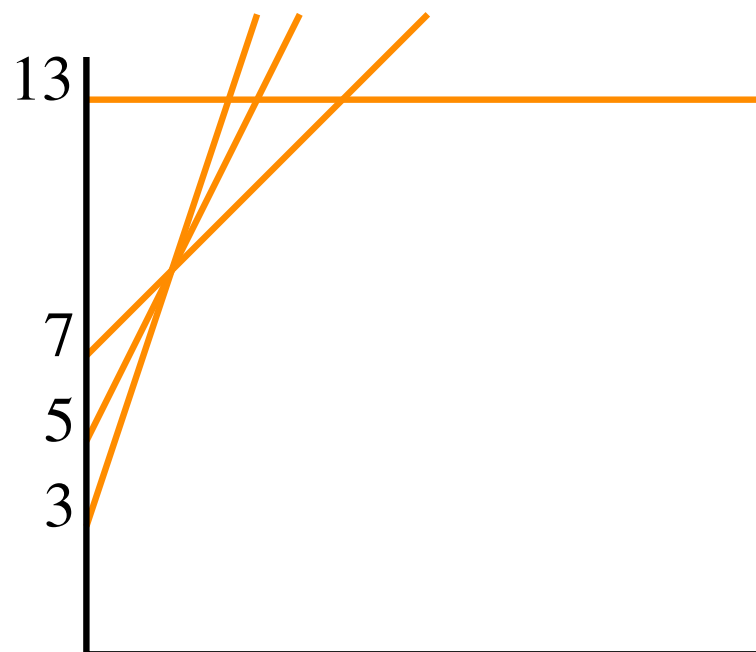
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

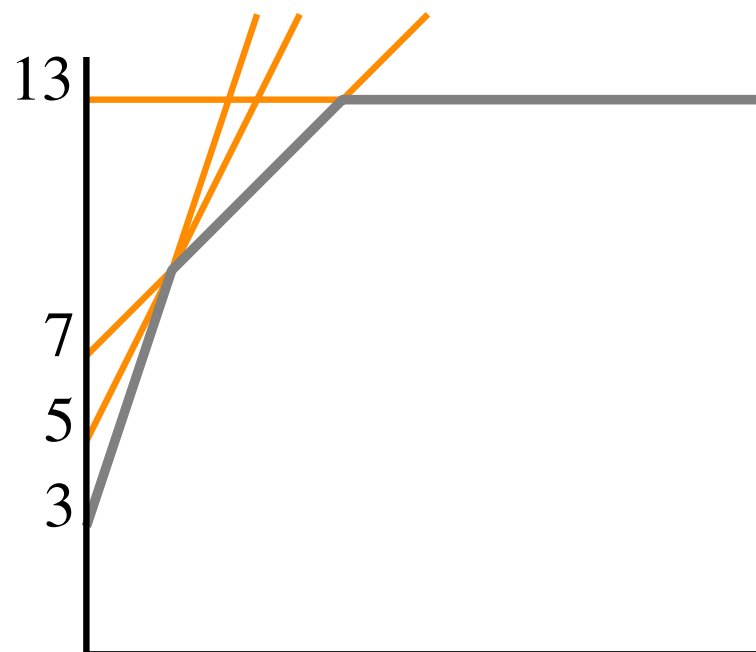
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

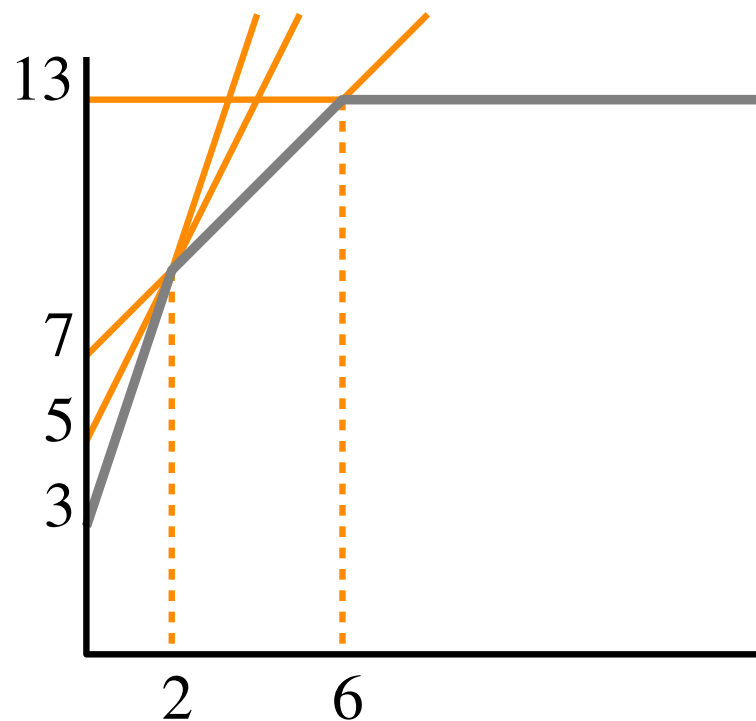
tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$f \rightsquigarrow$ functie $\mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$

$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$



$$f = \bigoplus_{i=0}^d c_i \odot x^{\odot i}$$

korter: $f = \text{“}\sum_{i=0}^d c_i x^i\text{”}$

tropische veeltermen kunnen tropisch worden opgeteld en vermenigvuldigd

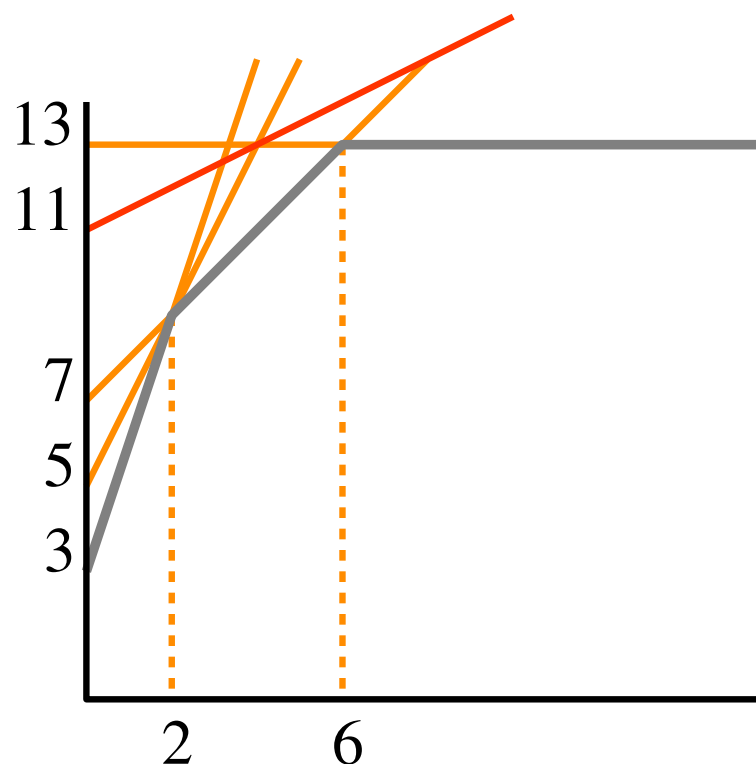
Voorbeeld

$$\begin{aligned} f &= \text{“}3(x + 2)^2(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^2 + 2x + 4)(x + 6)\text{”} \\ &= \text{“}3(x^3 + 2x^2 + 4x + 10)\text{”} \\ &= \text{“}3x^3 + 5x^2 + 7x + 13\text{”} \end{aligned}$$

$$f \rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$$

$$x \mapsto \min_i (c_i + ix)$$

($f \oplus (11 \odot x^{1/2})$ definieert dezelfde functie!)



Stelling

$g : \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ continu, concaaf, stuksgewijs lineair, met richtingsafgeleiden in $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \exists!$ veelterm f van de vorm “ $c \prod_{i=1}^d (x + x_i)$ ” dat aanleiding geeft tot de functie g .

Stelling

$g : \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ continu, concaaf, stuksgewijs lineair, met richtingsafgeleiden in $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \exists!$ veelterm f van de vorm “ $c \prod_{i=1}^d (x + x_i)$ ” dat aanleiding geeft tot de functie g .

Definitie

De $x_i \in \mathbb{R}_\infty$ ($\rightsquigarrow$ knikken in grafiek) heten *nulpunt* van f .

Stelling

$g : \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ continu, concaaf, stuksgewijs lineair, met richtingsafgeleiden in $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \exists!$ veelterm f van de vorm “ $c \prod_{i=1}^d (x + x_i)$ ” dat aanleiding geeft tot de functie g .

Definitie

De $x_i \in \mathbb{R}_\infty$ ($\rightsquigarrow$ knikken in grafiek) heten *nulpunt* van f .

Relatie tot gewone polynomen

K een lichaam met niet-Archimedische valuatie $v : K \rightarrow \mathbb{R}_\infty$
 $\rightsquigarrow \text{Trop} : K[x] \rightarrow \mathbb{R}_\infty[x], \sum_i c_i x^i \mapsto “\sum_i v(c_i) x^i”$ *tropicalisatie*

Stelling

$g : \mathbb{R}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ continu, concaaf, stuksgewijs lineair, met richtingsafgeleiden in $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \exists!$ veelterm f van de vorm “ $c \prod_{i=1}^d (x + x_i)$ ” dat aanleiding geeft tot de functie g .

Definitie

De $x_i \in \mathbb{R}_\infty$ ($\rightsquigarrow$ knikken in grafiek) heten *nulpunt* van f .

Relatie tot gewone polynomen

K een lichaam met niet-Archimedische valuatie $v : K \rightarrow \mathbb{R}_\infty$
 $\rightsquigarrow \text{Trop} : K[x] \rightarrow \mathbb{R}_\infty[x], \sum_i c_i x^i \mapsto “\sum_i v(c_i) x^i”$ *tropicalisatie*

Lemma (Gauss/Newton)

$\text{Trop}(fg) = \text{Trop}(f) \odot \text{Trop}(g)$ (als functies)

$\rightsquigarrow v(\{\text{nulpunten van } f \text{ in } \overline{K}\}) = \{\text{nulpunten van } \text{Trop}(f)\}$

$$f = \text{“}\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x^i y^j\text{”}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{N}^2$$

$$\rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}, \quad (x, y) \mapsto \min_{ij} (c_{ij} + ix + jy)$$

stuksgewijs lineair, concaaf, geheeltallige gradienten

$f = \text{“}\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x^i y^j\text{”}$, $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{N}^2$
 $\rightsquigarrow$ functie $\mathbb{R}_{\infty}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$, $(x, y) \mapsto \min_{ij}(c_{ij} + ix + jy)$
stuksgewijs lineair, concaaf, geheeltallige gradienten

Definitie

$V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\infty}^2 \mid f \text{ niet lineair}\}$ *tropische kromme*

$$f = \text{“}\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x^i y^j\text{”}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{N}^2$$

$$\rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}, (x, y) \mapsto \min_{ij} (c_{ij} + ix + jy)$$

stuksgewijs lineair, concaaf, geheeltallige gradienten

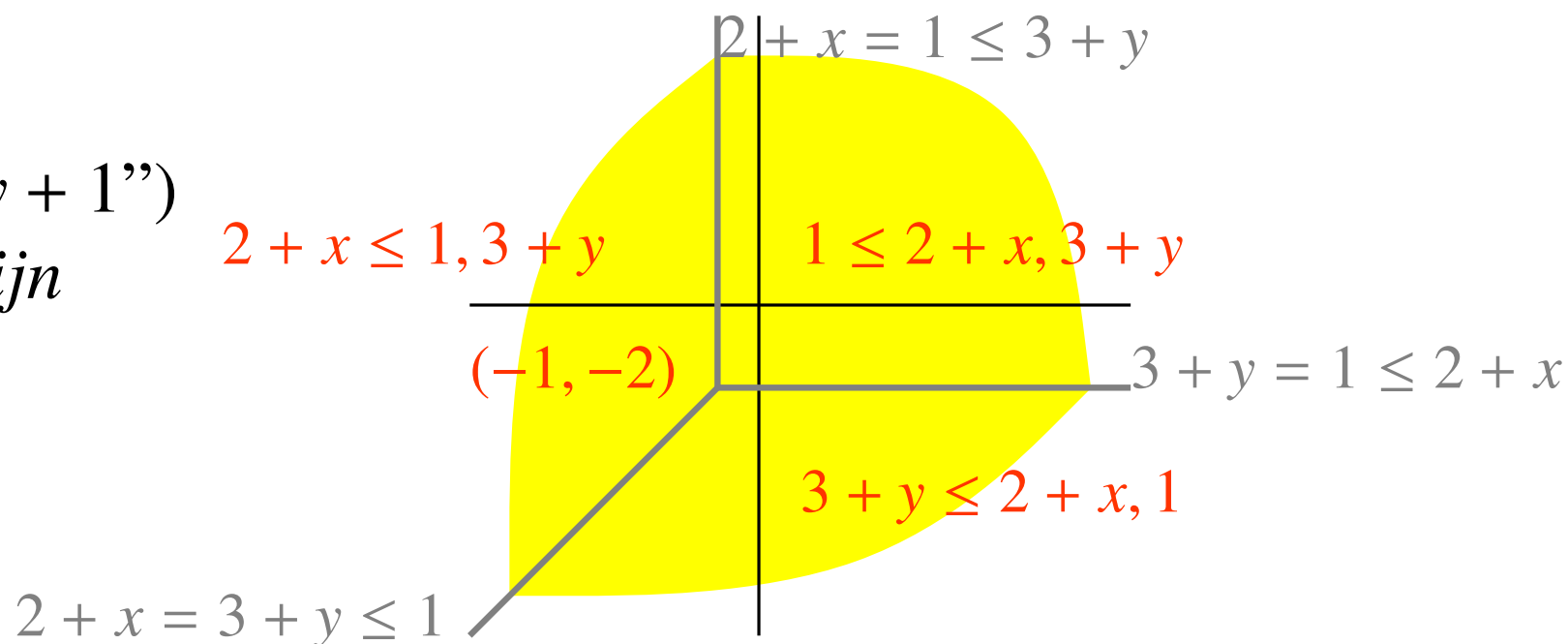
Definitie

$$V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\infty}^2 \mid f \text{ niet lineair}\} \text{ tropische kromme}$$

Voorbeeld

$$V(\text{“}2x + 3y + 1\text{”})$$

tropische lijn



$$f = \text{“}\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x^i y^j\text{”}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{N}^2$$

$$\rightsquigarrow \text{functie } \mathbb{R}_{\infty}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}, \quad (x, y) \mapsto \min_{ij} (c_{ij} + ix + jy)$$

stuksgewijs lineair, concaaf, geheeltallige gradienten

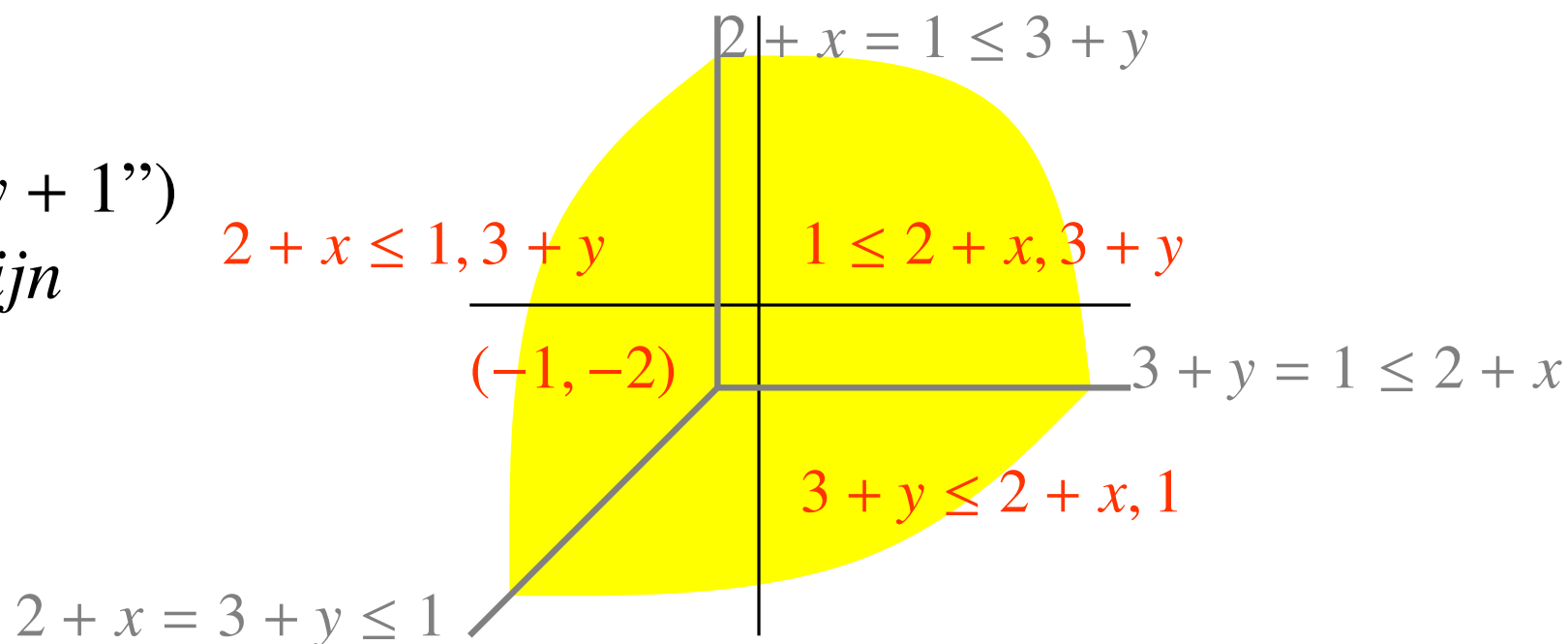
Definitie

$$V(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\infty}^2 \mid f \text{ niet lineair}\} \text{ tropische kromme}$$

Voorbeeld

$$V(\text{“}2x + 3y + 1\text{”})$$

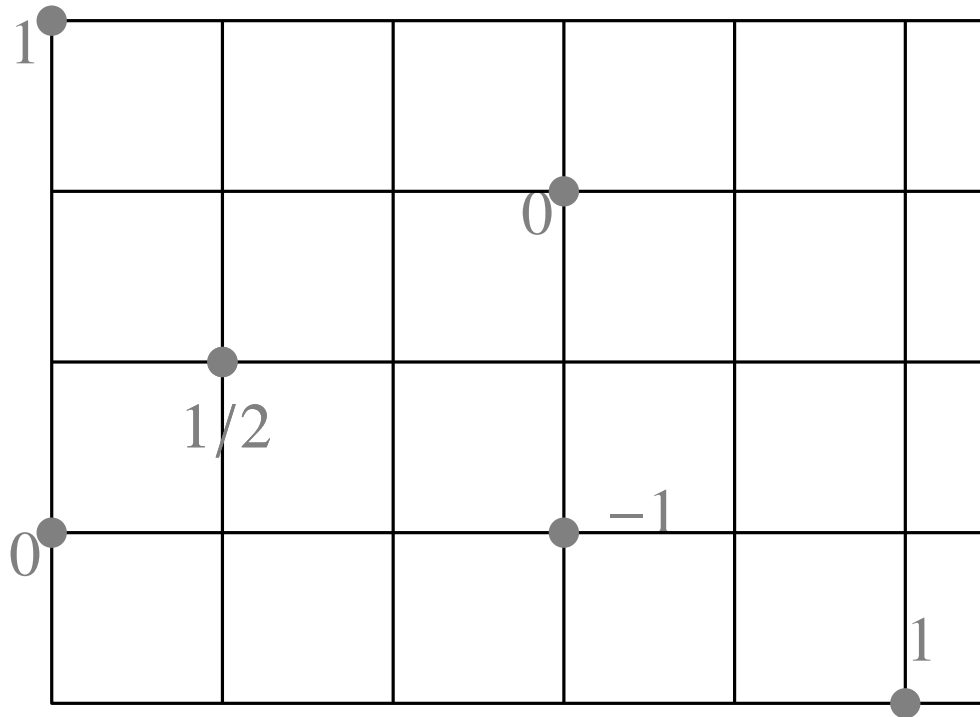
tropische lijn



$\rightsquigarrow$ *tropische varianten van Pappus, Desargues, ...*

Tropische vlakke krommen tekenen

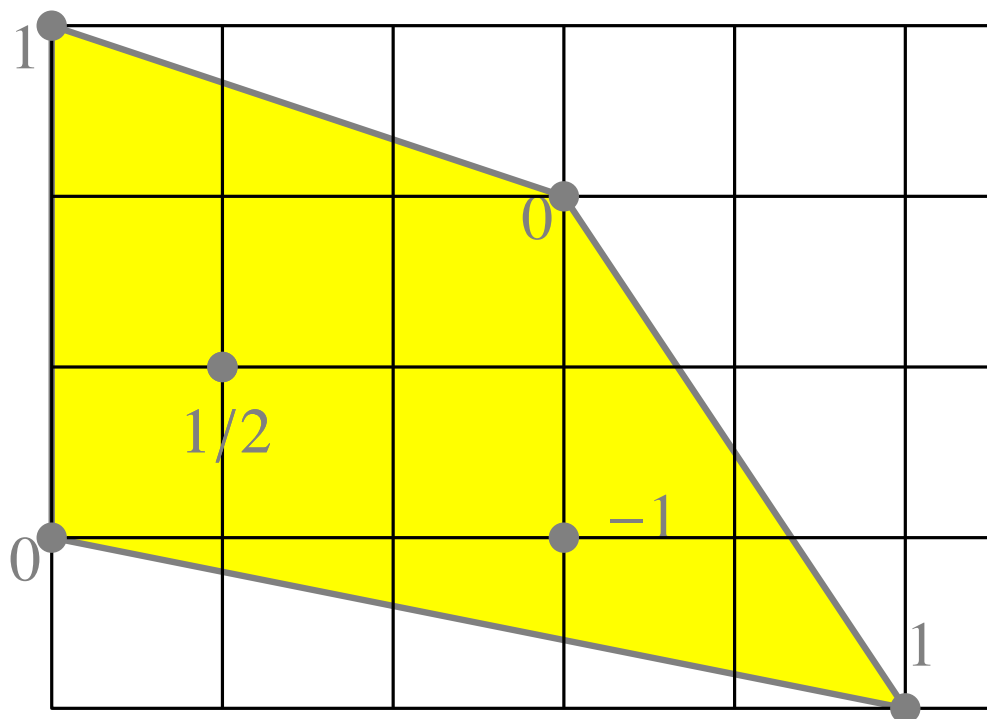
Voorbeeld: $f = “0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5”$



Tropische vlakke krommen tekenen

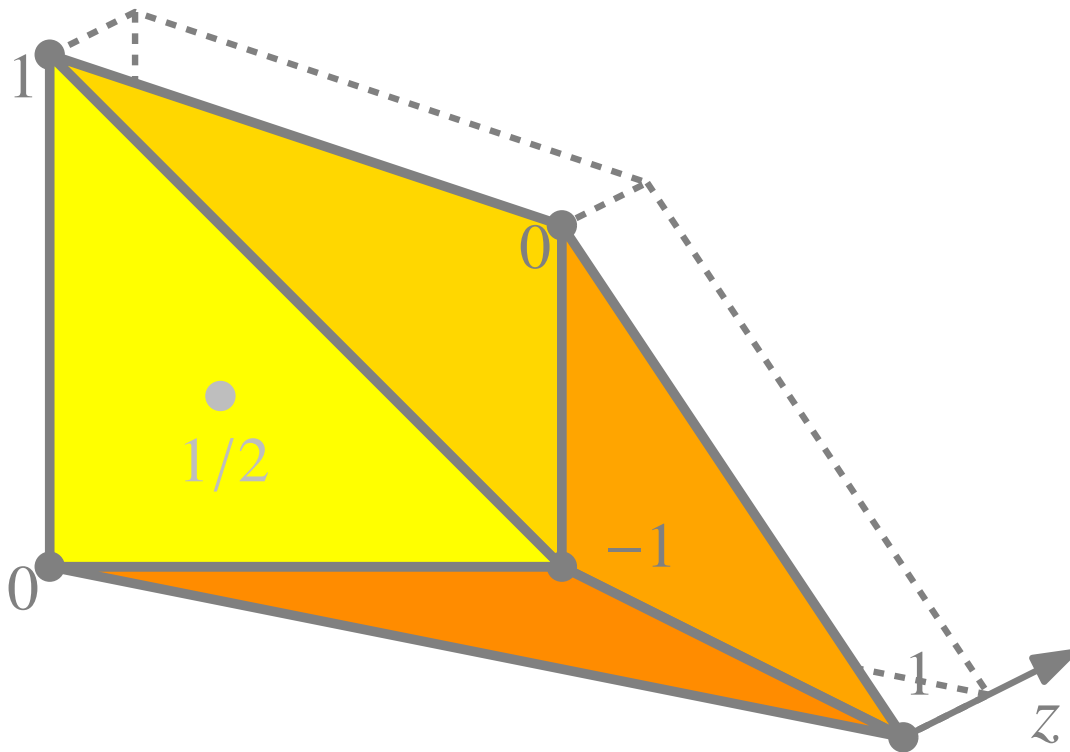
6

Voorbeeld: $f = "0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5"$



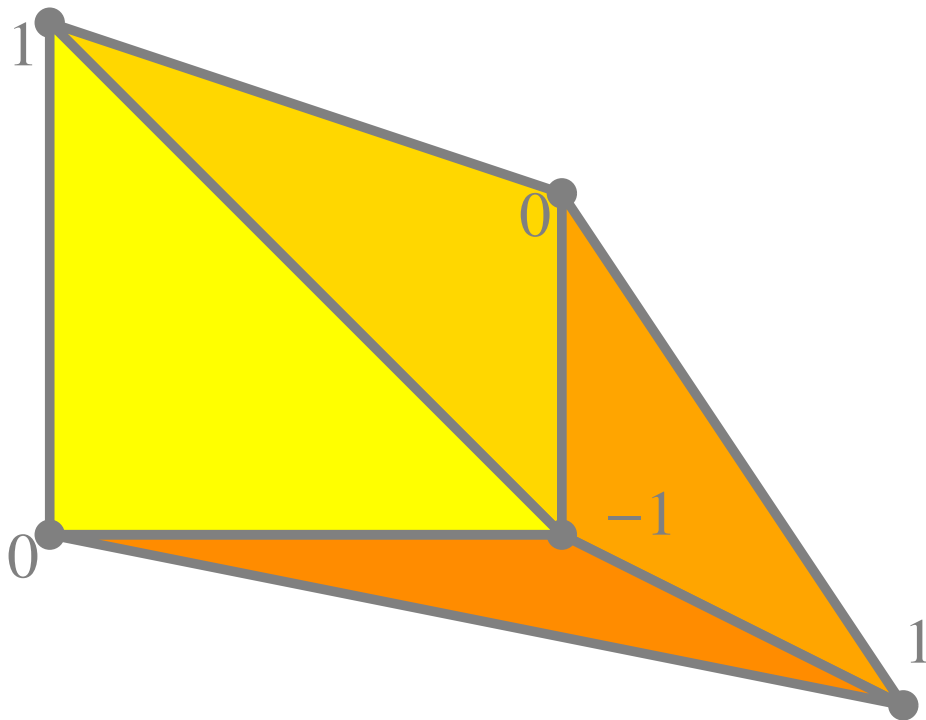
1. $\Delta := \text{convex omhulsel van } A$

Voorbeeld: $f = "0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5"$



1. $\Delta := \text{convex omhulsel van } A$
2. $C := \text{convex omhulsel in } \mathbb{R}^3 \text{ van } (i, j, z) \text{ met } (i, j) \in A \text{ en } z \geq c_{ij}$

Voorbeeld: $f = “0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5”$

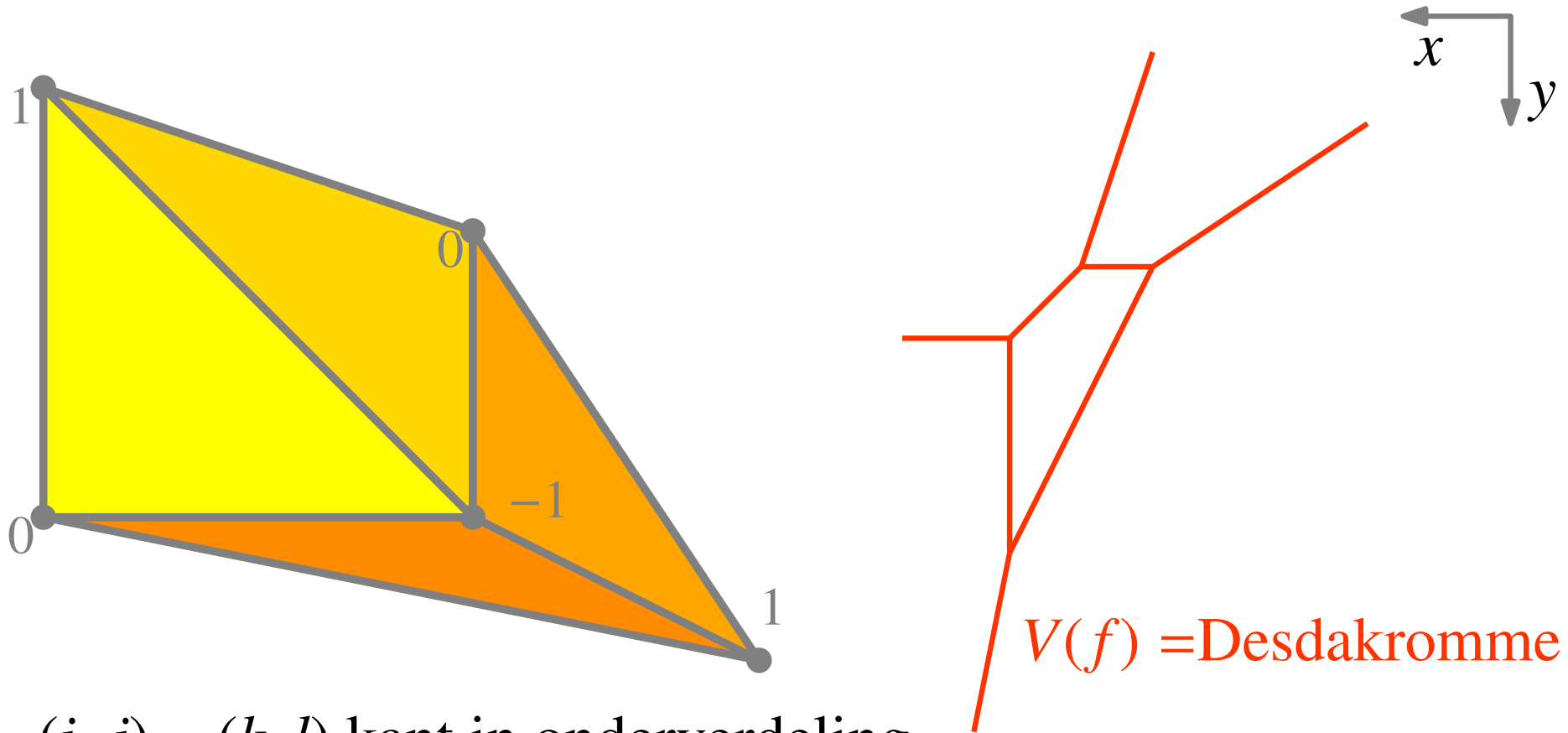


1. $\Delta := \text{convex omhulsel van } A$
2. $C := \text{convex omhulsel in } \mathbb{R}^3 \text{ van } (i, j, z) \text{ met } (i, j) \in A \text{ en } z \geq c_{ij}$
3. projecteer C naar beneden $\rightsquigarrow$ *reguliere onderverdeling* van Δ

Tropische vlakke krommen tekenen

6

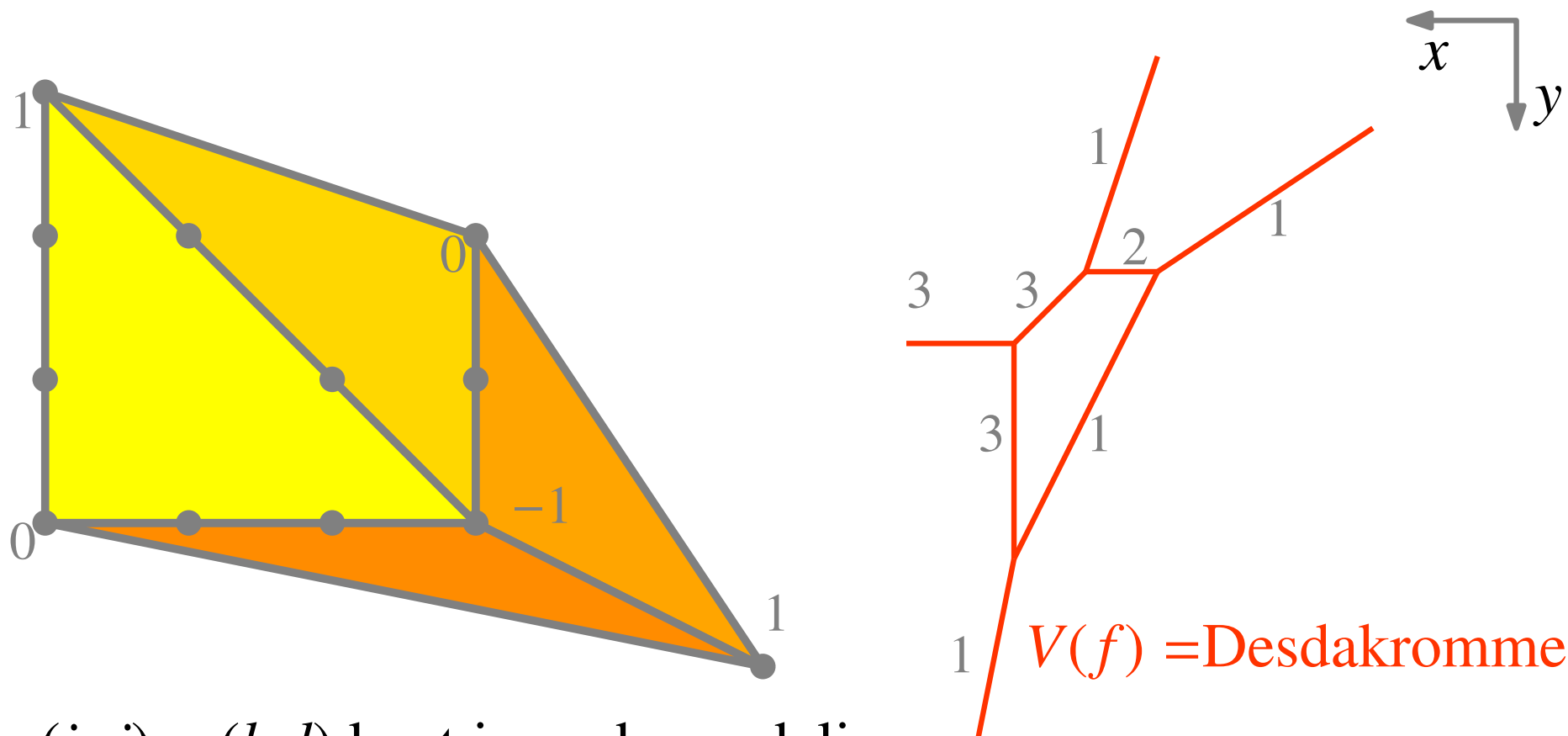
Voorbeeld: $f = "0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5"$



4. $(i, j) - (k, l)$ kant in onderverdeling

$\Leftrightarrow V(f)$ heeft lijnstuk waar $c_{ij} + ix + jy = c_{kl} + kx + ly < \text{rest}$

Voorbeeld: $f = "0y + 1y^4 + (1/2)xy^2 + (-1)x^3y + 0x^3y^3 + 1x^5"$

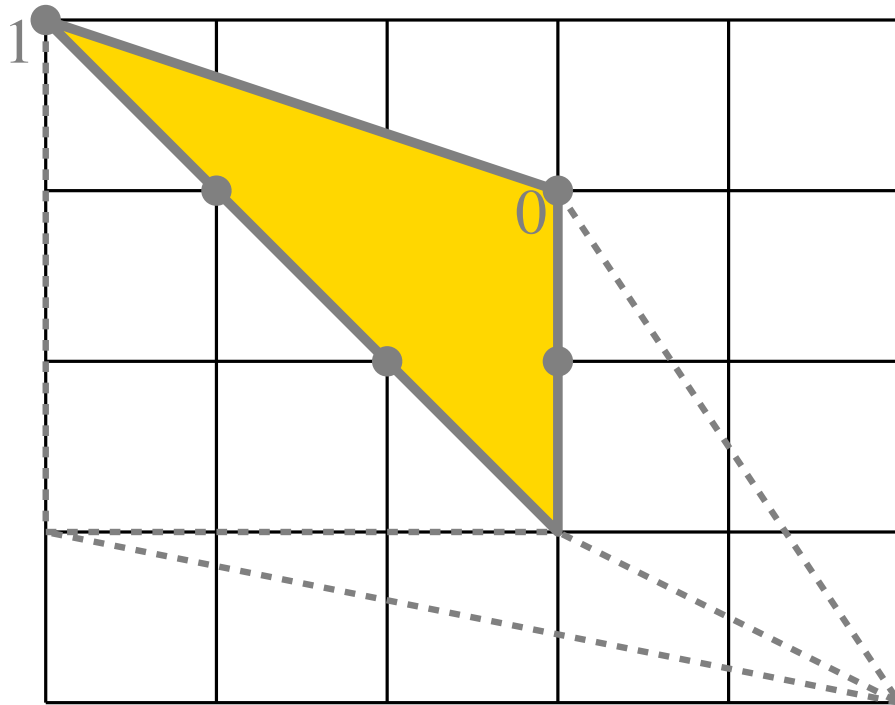


4. $(i, j) - (k, l)$ kant in onderverdeling

$\Leftrightarrow V(f)$ heeft lijnstuk waar $c_{ij} + ix + jy = c_{kl} + kx + ly < \text{rest}$

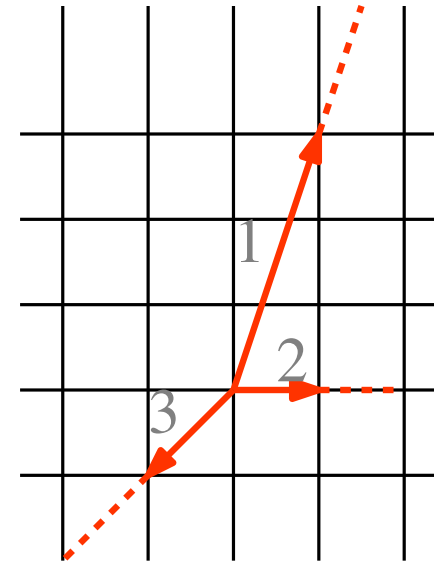
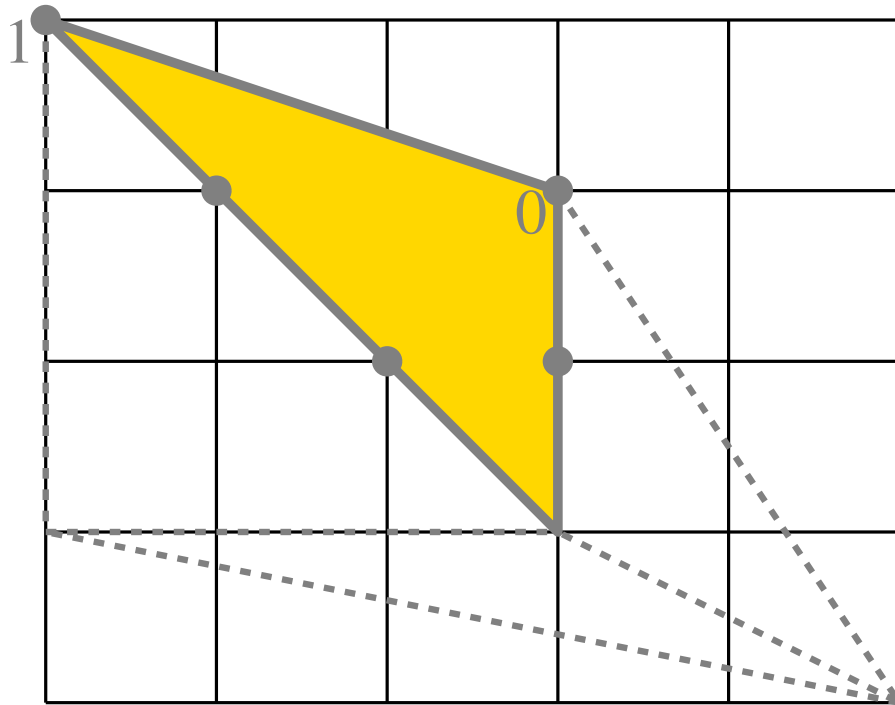
5. gewicht van lijnstuk = # roosterpunten op kant min 1

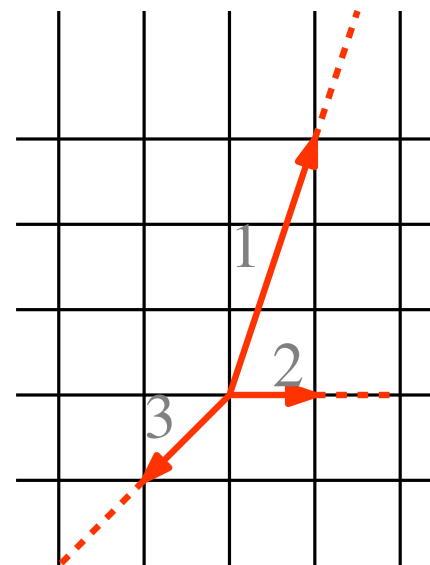
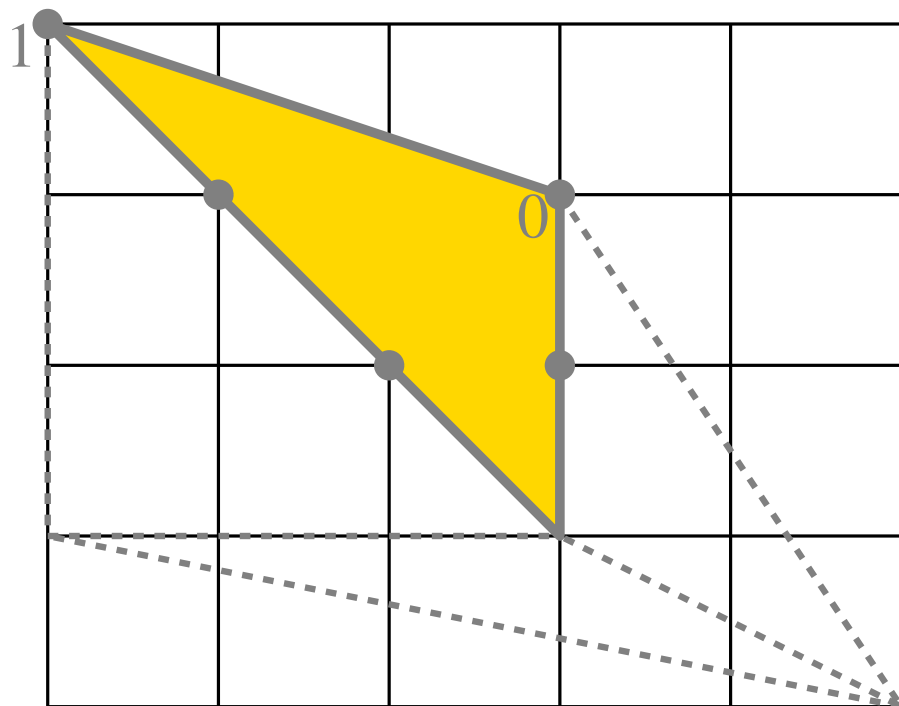
Lokaal evenwicht in de Desdakromme



Lokaal evenwicht in de Desdakromme

7





$$3(-1, -1) + 2(1, 0) + 1(1, 3) = (0, 0)$$

Stelling

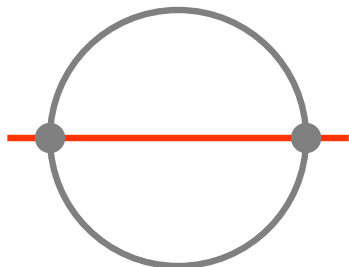
Een tropische vlakke kromme $V(f)$ is een gewogen, rechtlijnige graaf in $\mathbb{R}_{\infty}^2$ met geheeltallige richtingen en lokaal in evenwicht. Het omgekeerde geldt ook.

Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.

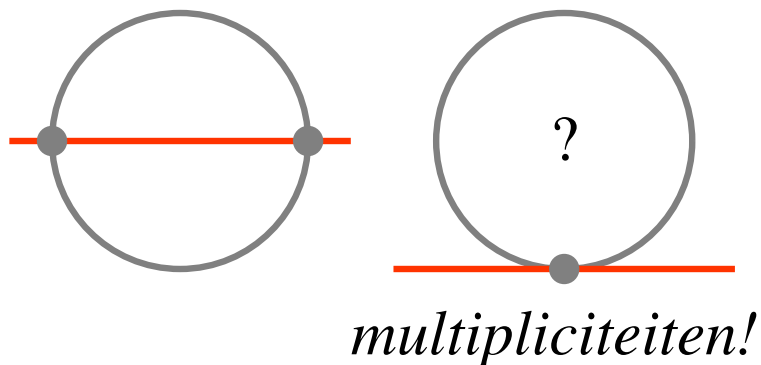
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



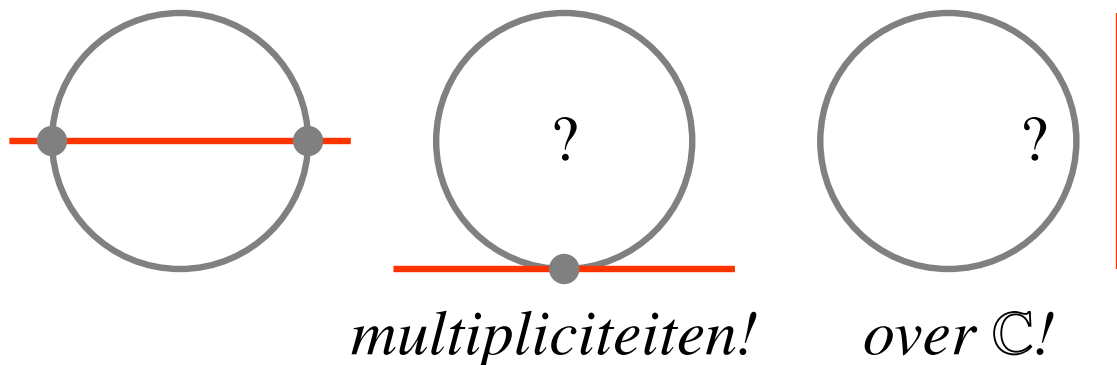
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



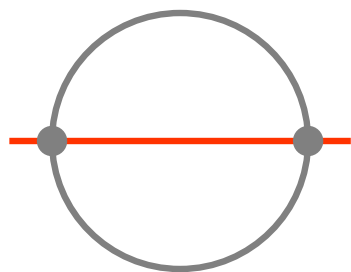
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.

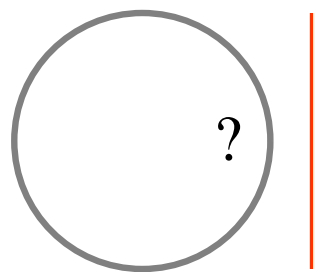
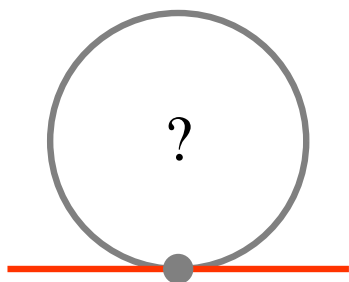


Klassieke stelling van Bézout

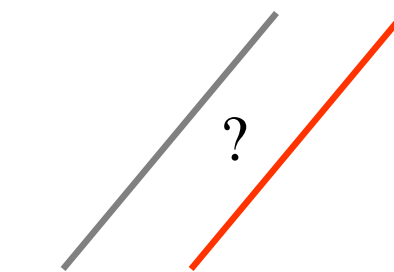
C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



multipliciteiten!



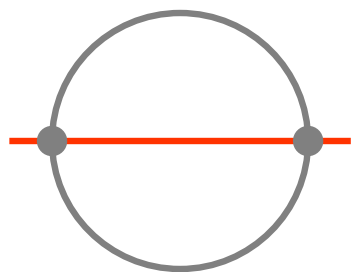
over $\mathbb{C}$!



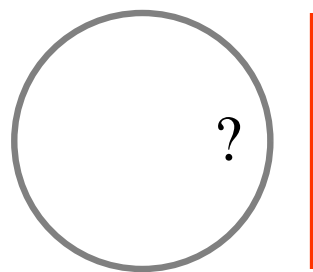
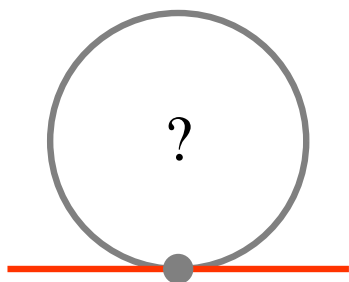
projectief!

Klassieke stelling van Bézout

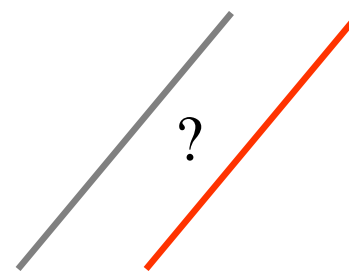
C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



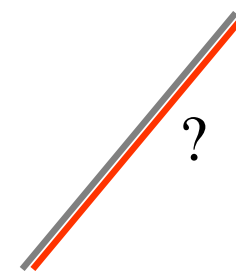
multipliciteiten!



over $\mathbb{C}$!



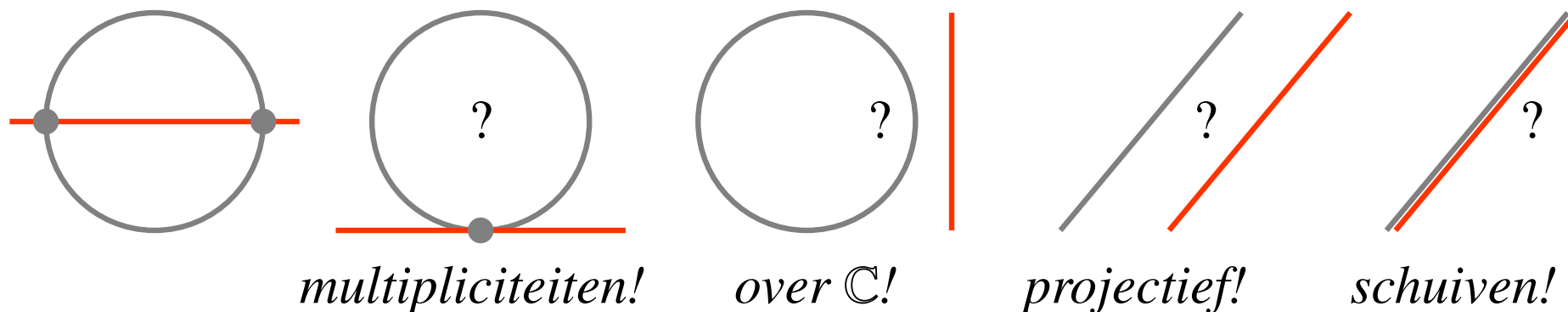
projectief!



schuiven!

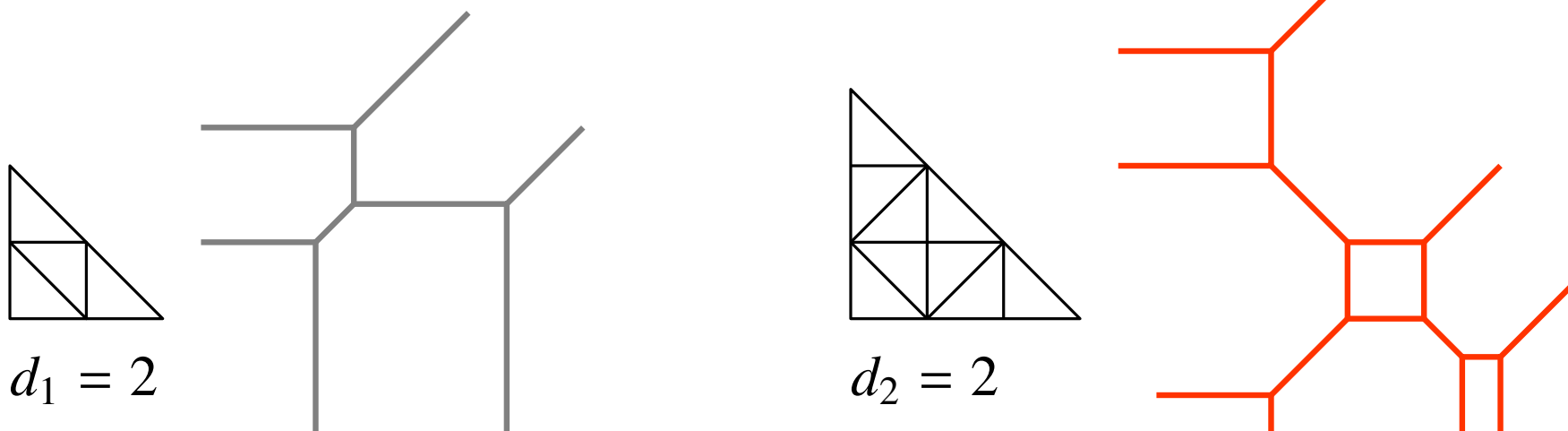
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



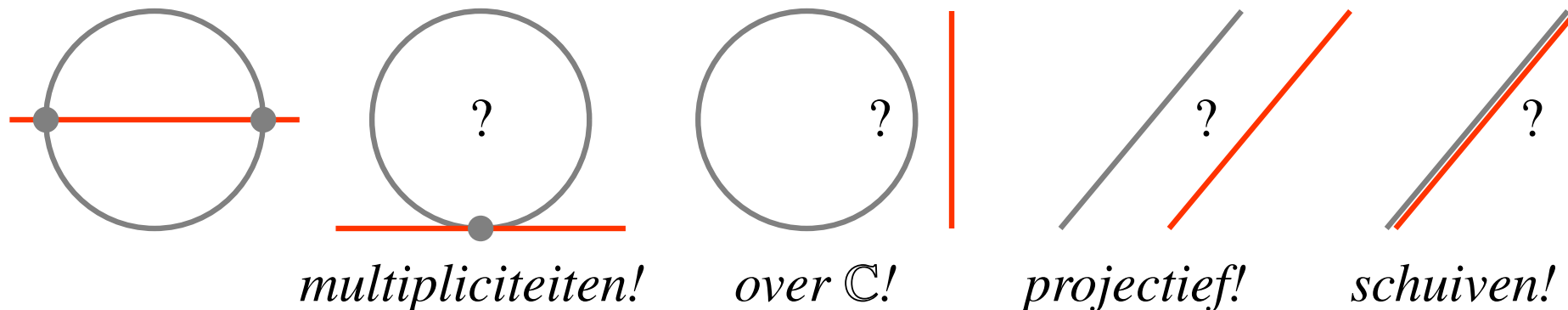
Stelling [Richter-Gebert, Sturmfels, Theobald 2003]

Idem voor tropische krommen.



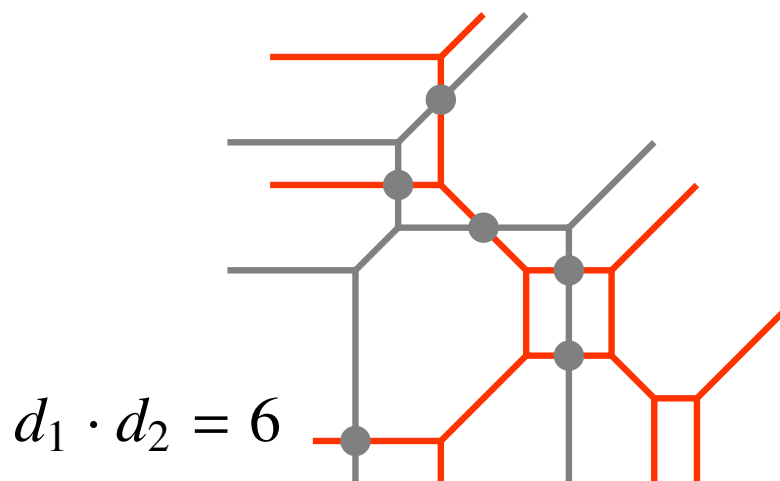
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



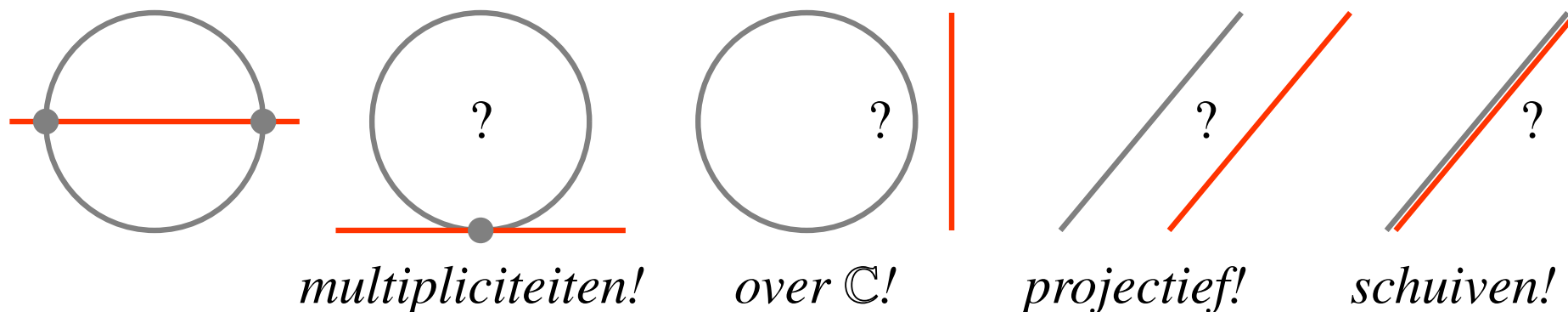
Stelling [Richter-Gebert, Sturmfels, Theobald 2003]

Idem voor tropische krommen.



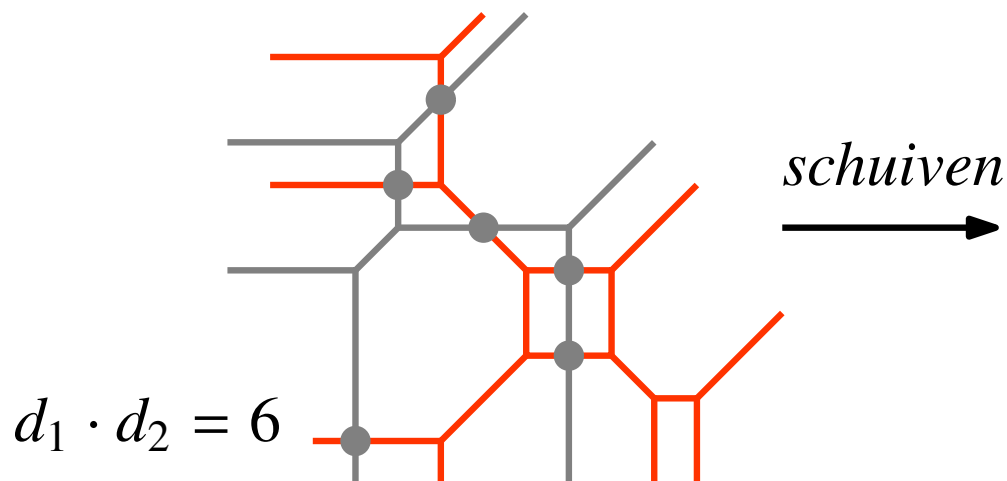
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



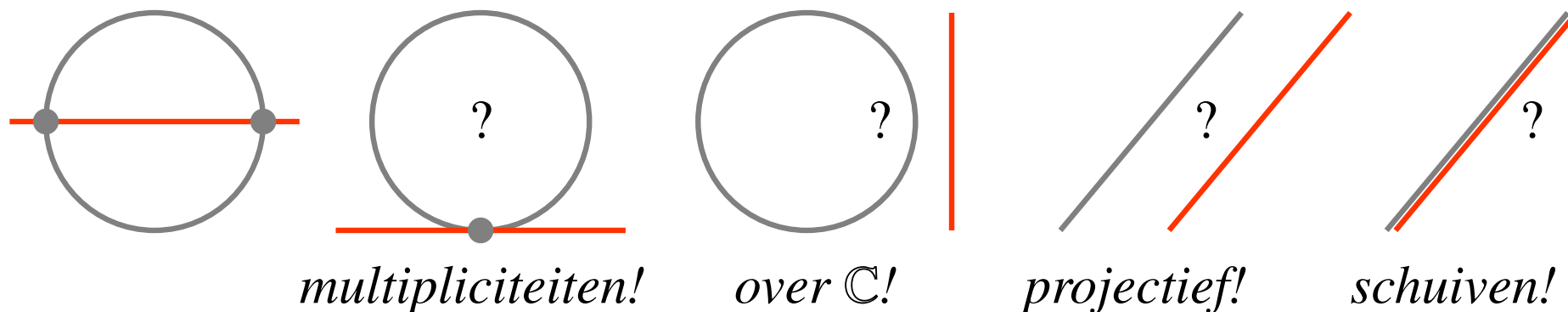
Stelling [Richter-Gebert, Sturmfels, Theobald 2003]

Idem voor tropische krommen.



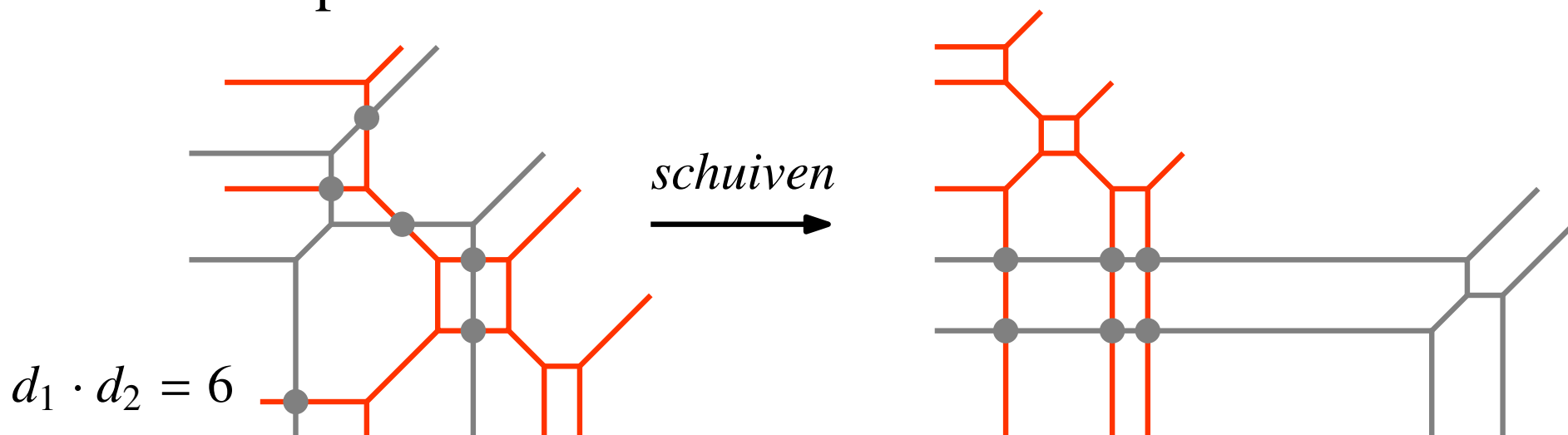
Klassieke stelling van Bézout

C_1, C_2 vlakke krommen, graden $d_1, d_2 \rightsquigarrow |C_1 \cap C_2| = d_1 d_2$.



Stelling [Richter-Gebert, Sturmfels, Theobald 2003]

Idem voor tropische krommen.



Tropische hyperoppervlakken

f tropische veelterm in n variabelen

$\rightsquigarrow$ functie $\mathbb{R}_{\infty}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$

$\rightsquigarrow V(f)$ *tropisch hyperoppervlak*

f tropische veelterm in n variabelen

$\rightsquigarrow$ functie $\mathbb{R}_{\infty}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$

$\rightsquigarrow V(f)$ *tropisch hyperoppervlak*

Voorbeeld

$f = \sum_{\pi \in S_3} x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} x_{3\pi(3)}$, de *tropische determinant*

$\rightsquigarrow \dim V(f) = 8$, evenwichtige polyhedrale waaier in $\mathbb{R}_{\infty}^9$

$\rightsquigarrow$ elke kegel bevat $(s_i + t_j)_{ij} = (s_i \odot t_j)_{ij}$, een 5-dim ruimte

$\rightsquigarrow$ modulo deze ruimte een 3-dimensionale waaier in $\mathbb{R}^4$

$\rightsquigarrow$ snijden met 3-sfeer geeft 2-dimensionaal complex:

f tropische veelterm in n variabelen

$\rightsquigarrow$ functie $\mathbb{R}_{\infty}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$

$\rightsquigarrow V(f)$ *tropisch hyperoppervlak*

Voorbeeld

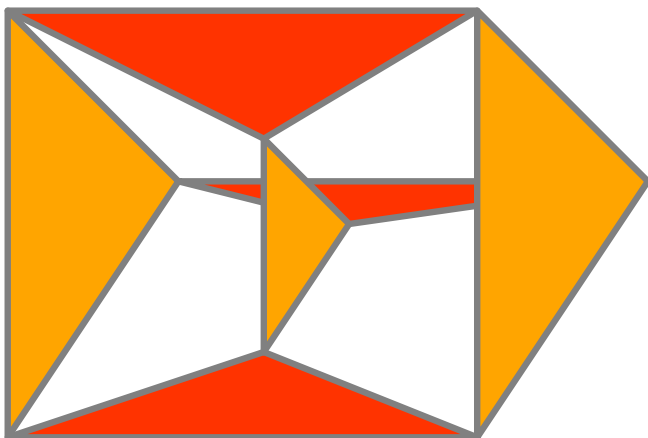
$f = \sum_{\pi \in S_3} x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} x_{3\pi(3)}$, de *tropische determinant*

$\rightsquigarrow \dim V(f) = 8$, evenwichtige polyhedrale waaier in $\mathbb{R}_{\infty}^9$

$\rightsquigarrow$ elke kegel bevat $(s_i + t_j)_{ij} = (s_i \odot t_j)_{ij}$, een 5-dim ruimte

$\rightsquigarrow$ modulo deze ruimte een 3-dimensionale waaier in $\mathbb{R}^4$

$\rightsquigarrow$ snijden met 3-sfeer geeft 2-dimensionaal complex:



9 knopen

6 driehoeken

9 vierhoeken

$S_2 \ltimes S_3^2$ werkt hierop

Tropicalisatie

(K, ν) niet-Archimedisch lichaam

$X \subseteq K^n$ gegeven door veeltermvergelijkingen $f_1 = f_2 = \dots = 0$

$I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ het voortgebrachte *ideaal*

Tropicalisatie

(K, ν) niet-Archimedisch lichaam

$X \subseteq K^n$ gegeven door veeltermvergelijkingen $f_1 = f_2 = \dots = 0$

$I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ het voortgebrachte *ideaal*

Definitie

$\text{Trop}(X) := \bigcap_{f \in I} V(\text{Trop}(f)) \subseteq \mathbb{R}_{\infty}^n$ *tropicalisatie van X*

Tropicalisatie

(K, ν) niet-Archimedisch lichaam

$X \subseteq K^n$ gegeven door veeltermvergelijkingen $f_1 = f_2 = \dots = 0$

$I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ het voortgebrachte *ideaal*

Definitie

$\text{Trop}(X) := \bigcap_{f \in I} V(\text{Trop}(f)) \subseteq \mathbb{R}_{\infty}^n$ *tropicalisatie van X*

Stelling (Bieri-Groves, 1984)

$\text{Trop}(X)$ is een evenwichtig polyhedraalcomplex en $\dim = \dim X$.

Tropicalisatie

(K, v) niet-Archimedisch lichaam

$X \subseteq K^n$ gegeven door veeltermvergelijkingen $f_1 = f_2 = \dots = 0$

$I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ het voortgebrachte *ideaal*

Definitie

$\text{Trop}(X) := \bigcap_{f \in I} V(\text{Trop}(f)) \subseteq \mathbb{R}_{\infty}^n$ *tropicalisatie van X*

Stelling (Bieri-Groves, 1984)

$\text{Trop}(X)$ is een evenwichtig polyhedraalcomplex en $\dim = \dim X$.

Opmerkingen:

- voor $k = 1$ is dit $V(\text{Trop}(f_1))$
- i.h.a. kleiner dan $\bigcap_i V(\text{Trop}(f_i))$
- er bestaat software gfan om $\text{Trop}(X)$ uit te rekenen

$$\varphi : K^m \times K^m \rightarrow K^{m(m-1)/2}, (y, z) \mapsto (y_i z_j - y_j z_i)_{i < j}$$

$\rightsquigarrow$ beeld X gegeven door $\forall i < j < k < l: x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk} = 0$

Grassmanniaan van 2-ruimten in m -ruimte

$$\varphi : K^m \times K^m \rightarrow K^{m(m-1)/2}, (y, z) \mapsto (y_i z_j - y_j z_i)_{i < j}$$

$\rightsquigarrow$ beeld X gegeven door $\forall i < j < k < l: x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk} = 0$

Grassmanniaan van 2-ruimten in m -ruimte

Wat is $\text{Trop}(X)$?

$$\varphi : K^m \times K^m \rightarrow K^{m(m-1)/2}, (y, z) \mapsto (y_i z_j - y_j z_i)_{i < j}$$

$\rightsquigarrow$ beeld X gegeven door $\forall i < j < k < l: x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk} = 0$

Grassmanniaan van 2-ruimten in m -ruimte

Wat is $\text{Trop}(X)$?

Voor $x \in \text{Trop}(X)$ moet i.i.g. gelden: $\forall i < j < k < l:$

$\min\{x_{ij} + x_{kl}, x_{ik} + x_{jl}, x_{il} + x_{jk}\}$ wordt ≥ 2 keer aangenomen.

$$\varphi : K^m \times K^m \rightarrow K^{m(m-1)/2}, (y, z) \mapsto (y_i z_j - y_j z_i)_{i < j}$$

$\rightsquigarrow$ beeld X gegeven door $\forall i < j < k < l: x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk} = 0$

Grassmanniaan van 2-ruimten in m -ruimte

Wat is $\text{Trop}(X)$?

Voor $x \in \text{Trop}(X)$ moet i.i.g. gelden: $\forall i < j < k < l:$

$\min\{x_{ij} + x_{kl}, x_{ik} + x_{jl}, x_{il} + x_{jk}\}$ wordt ≥ 2 keer aangenomen.

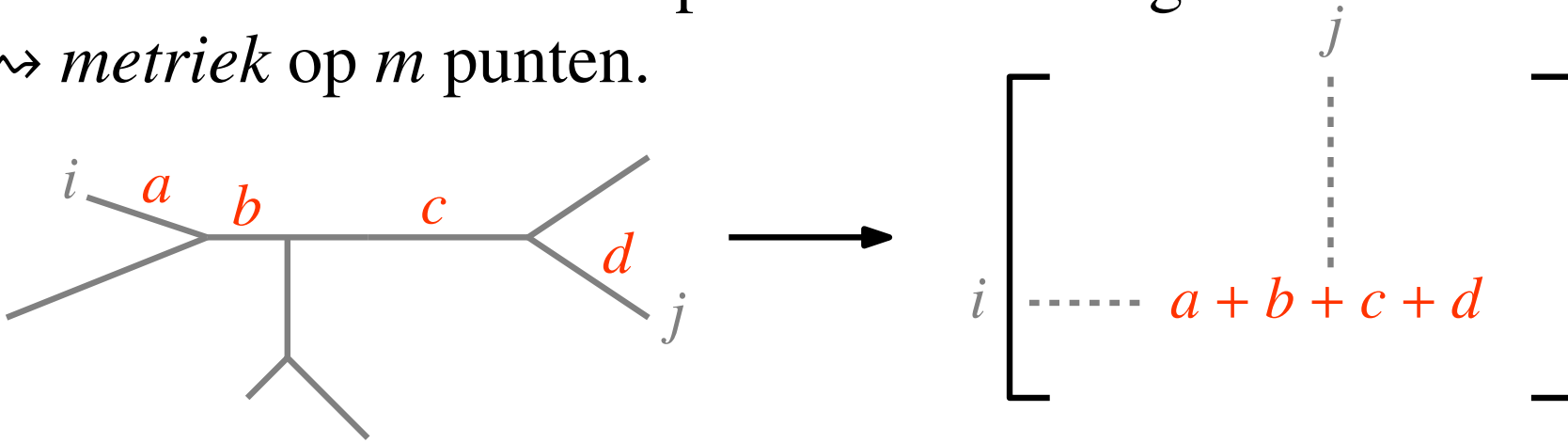
Stelling (Speyer-Sturmfels, 2005)

Dit is ook voldoende, en $\text{Trop}(X)$ “is” de ruimte van *fylogenetische bomen* met m bladeren.

Van bomen naar metrieken

boom met m bladeren en positieve kantlengtes

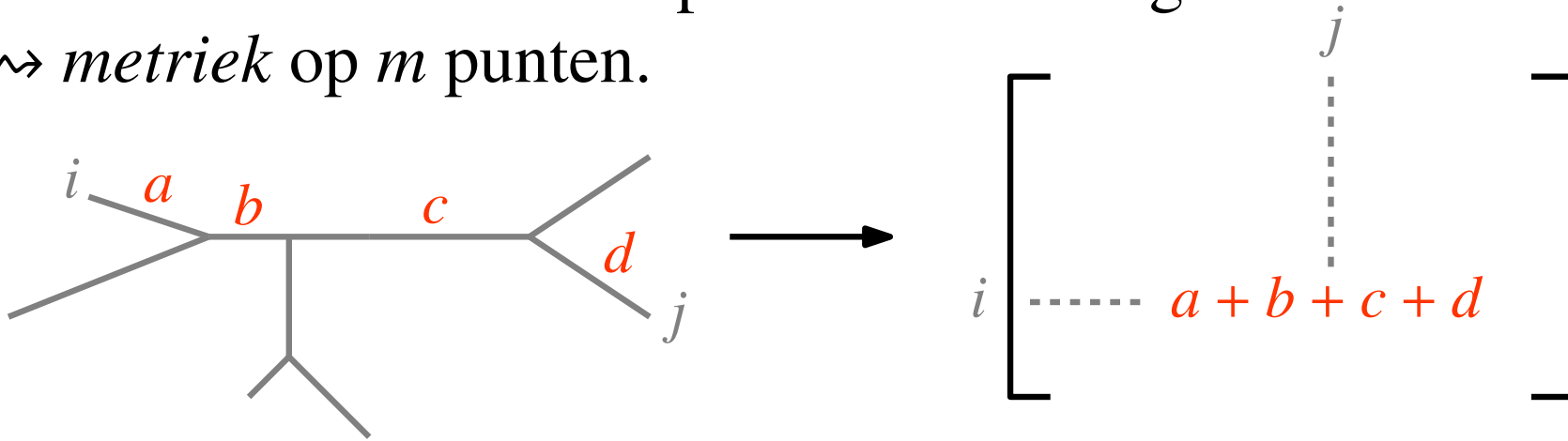
$\rightsquigarrow$ metriek op m punten.



Van bomen naar metrieken

boom met m bladeren en positieve kantlengtes

$\rightsquigarrow$ metriek op m punten.



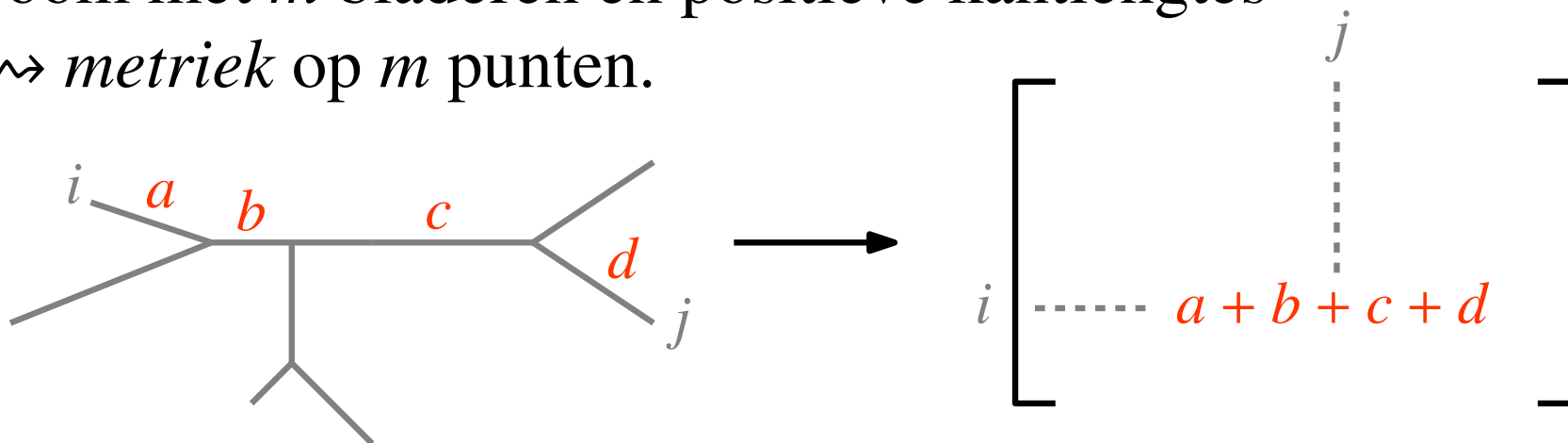
Van metrieken naar bomen

Welke metrieken $(d_{ij})_{ij}$ komen van bomen?

Van bomen naar metrieken

boom met m bladeren en positieve kantlengtes

$\rightsquigarrow$ metriek op m punten.

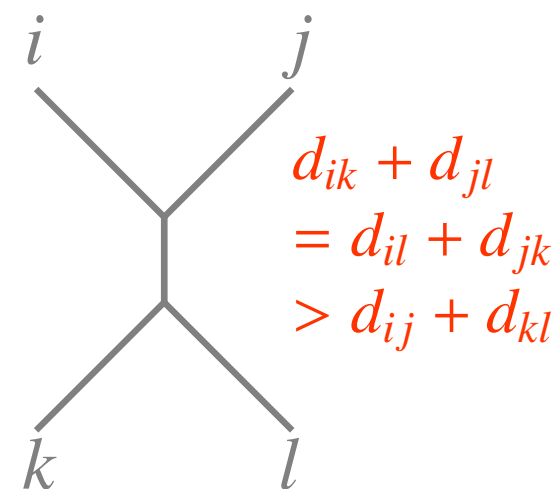


Van metrieken naar bomen

Welke metrieken $(d_{ij})_{ij}$ komen van bomen?

Antwoord

Precies die waarvoor $\forall i < j < k < l$
 $\max\{d_{ij} + d_{kl}, d_{ik} + d_{jl}, d_{il} + d_{jk}\}$
tenminste 2 keer aangenomen wordt.



Grassmanniaan voor $m = 5$

13

$m = 5 \rightsquigarrow \text{Trop}(X)$ is een 7-dimensionale waaier in $\mathbb{R}^{10}$

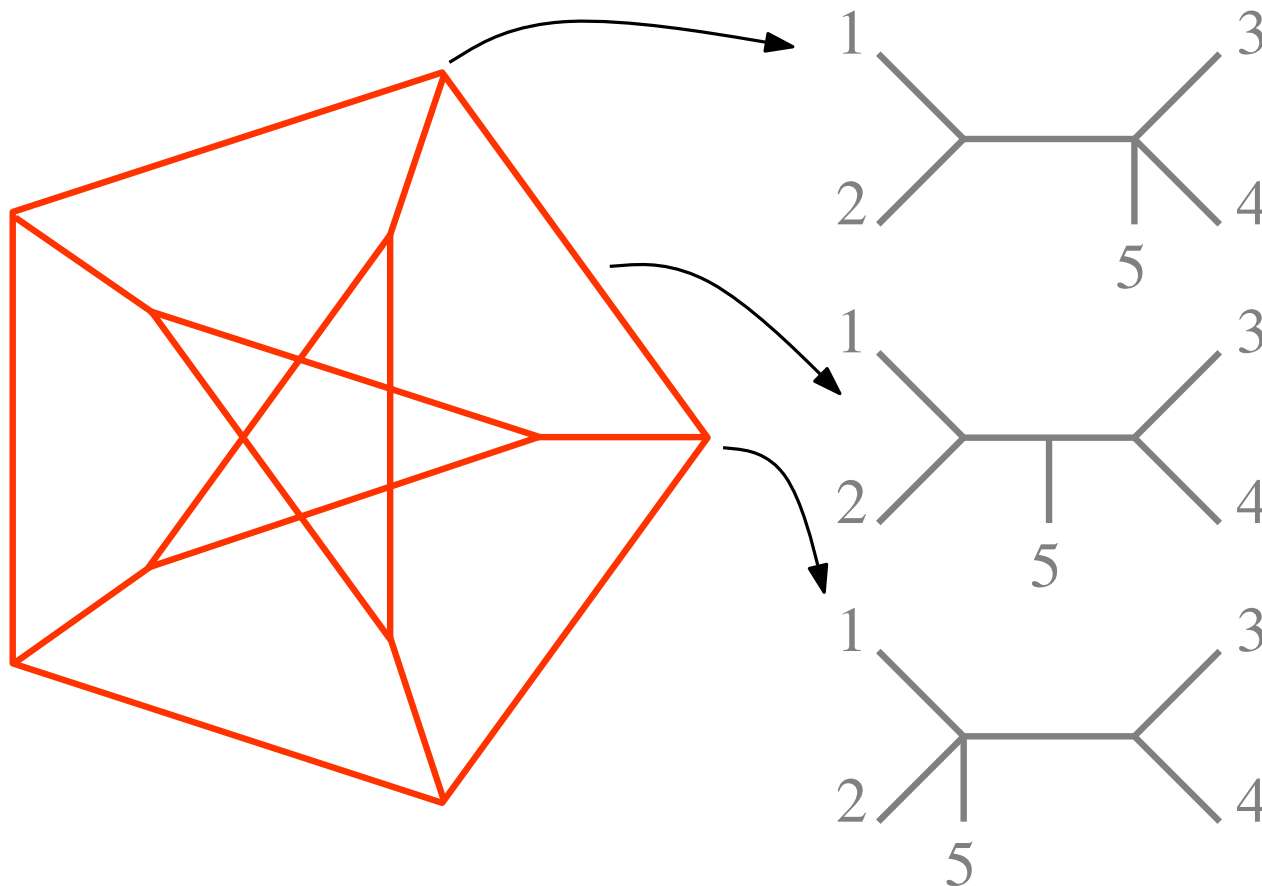
- modulo $(a_i + a_j)_{i < j} \rightsquigarrow$ 2-dimensionaal in $\mathbb{R}^5$
- snijden met een 4-sfeer geeft ...

Grassmanniaan voor $m = 5$

13

$m = 5 \rightsquigarrow \text{Trop}(X)$ is een 7-dimensionale waaier in $\mathbb{R}^{10}$

- modulo $(a_i + a_j)_{i < j} \rightsquigarrow$ 2-dimensionaal in $\mathbb{R}^5$
- snijden met een 4-sfeer geeft ... **de Petersengraaf!**



- $\mathbb{R}_\infty$: bijna een lichaam
- tropische univariate veeltermfuncties zijn te ontbinden
- tropische vlakke krommen: volledige karakterisatie
- tropische hyperoppervlakken: combinatorisch goed begrepen
- hogere codimensie: polyhedraal complex, juiste dimensie, maar slechts sommige voorbeelden goed begrepen

- $\mathbb{R}_\infty$: bijna een lichaam
- tropische univariate veeltermfuncties zijn te ontbinden
- tropische vlakke krommen: volledige karakterisatie
- tropische hyperoppervlakken: combinatorisch goed begrepen
- hogere codimensie: polyhedraal complex, juiste dimensie, maar slechts sommige voorbeelden goed begrepen

Niets over gezegd

- toepassingen in algebraïsche statistiek
- relatie tot Berkovichruimtes
- enumeratieve meetkunde
- merkwaardige naam, ...

- $\mathbb{R}_\infty$: bijna een lichaam
- tropische univariate veeltermfuncties zijn te ontbinden
- tropische vlakke krommen: volledige karakterisatie
- tropische hyperoppervlakken: combinatorisch goed begrepen
- hogere codimensie: polyhedraal complex, juiste dimensie, maar slechts sommige voorbeelden goed begrepen

Niets over gezegd

- toepassingen in algebraïsche statistiek
- relatie tot Berkovichruimtes
- enumeratieve meetkunde
- merkwaardige naam, ...

Dankuwel!

