

JAN EN DIFFERENTIAALMEETKUNDE

JAN DRAISMA

Voor me ligt de syllabus van het vak *Tensorrekening en Differentiaalmeetkunde* dat ik in 1995 of 1996 bij Jan de Graaf volgde. Differentiaalmeetkunde is een prachtig vak, dat een centrale rol in de wiskunde en de natuurkunde speelt. Je hebt maar heel weinig structuur nodig om aan de slag te kunnen: een topologische ruimte M die lokaal op $\mathbb{R}^n$ lijkt plus een C^∞ -structuur op M die vastgelegd wordt door de keuze van een atlas; dat is een glad manifold. Verder heb je één centrale constructie: de raakruimten $T_p M$ aan alle punten p van M , die tezamen genomen weer een glad manifold TM vormen. Vectorvelden zijn nu gladde afbeeldingen (sneden) $M \rightarrow TM$ die aan een punt p een vector in $T_p M$ toevoegen. Als student kom je veel ingewikkelder tensorvelden tegen, die altijd een beetje in de lucht blijven hangen als je deze basisconstructies niet hebt geleerd. Maar als je die basis eenmaal onder de knie hebt, kun je naar believen andere velden maken door puntsgewijs multilineaire constructies op de raakruimten los te laten. Door overal de duale ruimte $(T_p M)^*$ te nemen krijg je bijvoorbeeld T^*M , waarvan de sneden 1-vormen zijn, door een positief definit element in het symmetrische kwadraat $S^2 T^*M$ te kiezen leg je een Riemannse metriek vast, waarvan je met de Ricci-kromming (een tensorveld van hetzelfde type als de metriek) kunt meten in hoeverre het volumetensorveld van de metriek afwijkt van dat van een Euclidische metriek.

Enkele Tensoren uit de Continuummechanica

• De Rechter, Cauchy-Green Tensor (lineaire deformatie)

Gegeven: $\Phi: V \rightarrow W$, $\dim V = \dim W$
 V en W hebben inproduct $(\cdot, \cdot)_V$ resp. $(\cdot, \cdot)_W$.

Gezocht: $C: V \rightarrow V$, C moet verband houden met Φ , $C = \mathcal{I}$ als Φ isometrisch is.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & W \\ \mathcal{I} \downarrow & & \downarrow \mathcal{K} \\ V^* & \xrightarrow{\Phi^*} & W^* \end{array} \quad \begin{array}{l} (x, y)_V = \langle \mathcal{I}x, y \rangle_V \\ (u, v)_W = \langle \mathcal{K}u, v \rangle_W \\ \langle \Phi^* u, x \rangle_V = \langle u, \Phi x \rangle_W \end{array}$$

Oplossing: Neem $C = \mathcal{I}^{-1} \Phi^* \mathcal{K} \Phi$
 $C = \mathcal{I}$ $\iff \Phi$ is isometrisch.

Immers, voor alle x en y in V
 $(Cx, y)_V = (\mathcal{I}^{-1} \Phi^* \mathcal{K} \Phi x, y)_V = \langle \Phi^* \mathcal{K} \Phi x, y \rangle_V = \langle \mathcal{K} \Phi x, \Phi y \rangle_W = (\Phi x, \Phi y)_W = (x, y)_V$
 Het laatste is juist omdat d.o.s.d. als Φ isometrisch is.

De Lagrange deformatietensor $E = \frac{1}{2}(C - \mathcal{I})$ beschrijft de deformatie van het materiaal.

Zij $(\mathcal{E}_i)$ basis in V ($\mathcal{E}_a$) basis in W
 $C_i^j = g^{ij} F_i^a F_a^j$
 In matrixnotatie
 $C = G^{-1} F^T K F$
 Als $(\mathcal{E}_i)$ en $(\mathcal{E}_a)$ beide orthonormale bases zijn,
 dan $G = I$, $K = I$. Dan
 $C = F^T F$

Neem nu $\Phi = \mathcal{I} + U$, $\mathcal{I}$ isometrisch, U willekeurig.
 Dan is de Lagrange deformatietensor
 $E = \frac{1}{2} \mathcal{I}^{-1} \{ \mathcal{I}^* \mathcal{K} U + U^* \mathcal{K} \mathcal{I} + U^* \mathcal{K} U \}$
 T.o.v. orthonormale bases in V en W
 $E = \frac{1}{2} (\mathcal{I}^T U + U^T \mathcal{I} + U^T U)$.

Nog specialer: Neem $\dim V = \dim W$ en orthonormale bases zo dat $\mathcal{I} \mathcal{E}_i = \delta_i^a \mathcal{E}_a$, dan
 $E = \frac{1}{2} (U + U^T + U^T U)$

Nog specialer: Neem $V = W$. Zij $u = \Phi x - x = Ux$ het zgn. verplaatsingsveld.
 Dan zijn de componenten van de Cauchy'sche Tensor
 $U_i^j = U_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = u_{i,j}$
 Dan
 $E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{k,j})$ (symmetrisch over)

• De Spannungstensor $S \in T_2^1(V)$ (lineaire Spannungstensor)
 $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ $\dim V = 3$
 $\in V^* \times V^* \times V$

$S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ = kracht op georiënteerd part. opgespannen door $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{z}$. $S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) \in V$

Krachten evenwicht voor ieder vrijlid levert antisymmetrie in de 2^e en 3^e variabelen

0 = $S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) +$
 $+ S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) +$
 $= S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) + S(\cdot, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = 0$



Waarom vertel ik dit allemaal aan u, de lezer die deze dingen allang weet? Om te beginnen wil ik maar aangeven hoe weinig techniek je nodig hebt om allerlei vage velden uit de fysica wiskundige handen en voeten te geven. Die les staat ook op het handgeschreven inlegvel *Enkele tensoren uit de Continuïumsmechanica*, dat zojuist uit de syllabus valt. Wiskunde- en natuurkundestudenten zouden veel baat hebben bij een goede inleiding differentiaalmeetkunde vroeg in hun curriculum.

Een tweede reden is van soortgelijke stichtelijke aard. Laten we eerlijk zijn: hoeveel in Eindhoven afgestudeerde wiskundigen kunnen vertellen wat dat beroemde Poincarévermoeden is waarvoor Grigory Perelman de Fieldsmedaille heeft geweigerd? Zulke verhalen dringen door tot de media, en dan mag je niet met je mond vol tanden staan als je tante vraagt wat dat vermoeden behelst. En ook al begrijp je geen snars van het bewijs, zoals de meeste wiskundigen inclusief de schrijver dezes, een vaag idee mag je er toch wel van hebben? Het meest verrassend aan het bewijs is wel het volgende: het vermoeden zegt dat een topologische ruimte die aan bepaalde eisen voldoet—een enkelvoudig samenhangend, compact 3-manifold—homeomorf met de drie-sfeer is. Een uitspraak waar dus helemaal geen C^∞ -structuur in zit. Maar het bewijs van Hamilton en Perelman gebruikt wel degelijk een gladde structuur—en gelukkig heeft elk 3-manifold een unieke C^∞ -structuur, in tegenstelling tot de situatie in hogere dimensies. Het bewijs begint met “zomaar” een Riemannse metriek, en laat die onder invloed van de “Ricci-flow” evolueren—verbeteren, steeds in de richting van minus haar Ricci-kromming. Dan wordt bewezen dat de metriek in eindige tijd uitdooft, en geanalyseerd wat vlak daarvòòr gebeurt om te laten zien dat de onderliggende topologische ruimte S^3 was. Natuurlijk zitten er hele grote haken en ogen aan dit idee, die veel inspanning hebben geleverd om ervan af te komen.

Ik ben geen differentiaalmeetkundige, dus wat ik zojuist schreef kan ik alleen maar op een intuïtief niveau bewonderen—maar ook dat soort bewondering moeten we onder onze studenten kweken! Laat ik nu wat dichterbij huis komen: hoewel de differentiaalmeetkunde de wiskunde bij uitstek aandraagt om allerlei reëel existierende processen te beschrijven, staat ze ook verrassend dicht bij een gebied dat door velen als abstract en ver van toepassingen af staand wordt ervaren: de algebra. Daar ben ik meer in thuis. De link is even direct als schokkend: de cruciale vertaalslag is de overgang van de gladde variëteit M naar de $\mathbb{R}$ -algebra $C^\infty(M)$ van gladde functies op M . Nu is een *punt* van M niets anders dan een surjectief $\mathbb{R}$ -homomorfisme $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, een gladde afbeelding $M \rightarrow N$ gewoon een $\mathbb{R}$ -homomorfisme $C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ en een vectorveld op M niets anders dan een derivatie $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$; dat wil zeggen: X is $\mathbb{R}$ -lineair en voldoet aan de Leibnizregel $X(fg) = X(f)g + fX(g)$. Door deze algebraïsche kijk op de zaak gaat er een wereld voor je open: wat als je bijvoorbeeld $\mathbb{R}$ vervangt door andere lichamen, en de algebra van gladde functies door algemene commutatieve algebras? Dan kom je in de algebraïsche meetkunde terecht. Waarom zou je dat als ingenieur willen? Ten eerste omdat allerlei in het wild voorkomende gladde variëteiten, zoals compacte Liegroepen, algebraïsche tegenhangers hebben die makkelijker op een computer te behandelen zijn—Cohen en Murray ontwikkelen bijvoorbeeld al enige jaren algoritmen voor het rekenen in algebraïsche groepen. Ten tweede omdat het toestaan van eindige lichamen de constructie van allerlei objecten mogelijk maakt die zich gedragen als hun gladde tegenhangers, maar het grote voordeel hebben dat ze



(a) Infinitesimale isometrie.

(b) Platgeslagen constant veld.

FIGUUR 1. Twee soorten vectorvelden op S^{n-1} .

eindig zijn. Daardoor kunnen ze leiden tot foutenverbeterende codes, cryptografische protocollen of statistische designs. Een heel andere wereld, die algebraïsche meetkunde, dat wel. Maar zonder de intuïtie uit de differentiaalmeetkunde kom je er niet ver.

Dit sluit mooi aan op de vraag die Jan de Graaf me stelde bij mijn promotie. Jan had al jaren terug opgemerkt dat de volgende twee typen vectorvelden op de $(n-1)$ -dimensionale sfeer $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ een Lie-algebra opspannen (zie afbeelding 1)

- (1) infinitesimale isometrieën, van de vorm $\sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) \frac{\partial}{\partial x_i}$ waarbij de matrix (a_{ij}) scheef-symmetrisch is; en
- (2) vectorvelden die je krijgt door een constant vectorveld op $\mathbb{R}^n$ “plat te slaan” op de sfeer, in formulevorm van de vorm $\sum_i (v_i - \langle v, x \rangle x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, waarbij $v \in \mathbb{R}^n$ dat constante vectorveld en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard-inproduct is.

Dit is dus een Lie-algebra $\mathfrak{g}$ van dimensie $\binom{n}{2} + n$: het aantal vrijheidsgraden voor de a_{ij} en de v_i . Jan wilde nu weten of er nog grotere, maar wel eindig-dimensionale Lie-algebra’s van vectorvelden op S^{n-1} bestaan, die $\mathfrak{g}$ strict bevatten. Dat dit *niet* het geval is, volgt uit de theorie in mijn proefschrift.

Stelling 1. *Er is geen eindig-dimensionale Lie-algebra van gladde vectorvelden op S^{n-1} die $\mathfrak{g}$ strict bevat.*

Bewijsschets. Eerst moet je je afvragen wat voor Lie-algebra $\mathfrak{g}$ eigenlijk is. Als het “one of our friends” is, om met Persi Diaconis te spreken, d.w.z. een van de klassieke Lie-algebra’s, dan ligt het, gezien de dimensie $\binom{n+1}{2}$ en het feit dat $\mathfrak{g}$ de Lie-algebra $\mathfrak{so}_n$ van infinitesimale rotaties bevat, voor de hand dat $\mathfrak{g}$ een orthogonale Lie-algebra $\mathfrak{so}_{p,q}$ is bij een bilineaire vorm van signatuur (p, q) met

$p + q = n + 1$ en $p \geq n$. Maar hoe werkt de bijbehorende groep $\mathrm{SO}_{p,q}(\mathbb{R})$ op de $(n - 1)$ -dimensionale sfeer? Voor $q = 0$ lijkt er geen natuurlijke actie, maar de groep $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$ werkt op natuurlijke wijze op de n -dimensionale projectieve ruimte $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ met homogene coördinaten $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ en stabiliseert daarin de quadriek $Q(\mathbb{R})$ met vergelijking $x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0$. Deze quadriek heeft alleen maar reële punten in de (open en dichte) kaartomgeving waar x_{n+1} ongelijk aan nul is—en dus 1 genomen mag worden; met andere woorden, $Q(\mathbb{R})$ is gewoon S^{n-1} , en $\mathrm{SO}_{n,1}$ werkt inderdaad op de sfeer. De Lie-algebra van $\mathrm{SO}_{n,1}$ bestaat uit alle matrices van de vorm

$$X(A, v) := \begin{bmatrix} A & v \\ v^T & 0 \end{bmatrix},$$

waarbij $A = -A^T$ een scheefsymmetrische $n \times n$ -matrix is, en $v \in \mathbb{R}^n$. Een eenvoudige berekening laat zien dat de vectorvelden behorende bij de “flows” $\exp(tX(A, 0))$ en $\exp(tX(0, v))$ precies de vectorvelden bij (1) respectievelijk (2) zijn. Bijvoorbeeld geldt modulo t^2 :

$$\begin{aligned} & \exp(tX(0, v))(x_1 : \dots : x_n : 1) \\ &= (1 + tX(0, v))(x_1 : \dots : x_n : 1) \\ &= (x_1 + tv_1 : \dots : x_n + tv_n : 1 + t\langle v, x \rangle) \\ &= (x_1 + t(v_1 - \langle v, x \rangle x_1) : \dots : x_n + t(v_n - \langle v, x \rangle x_n) : 1), \end{aligned}$$

en dit geeft het vectorveld bij (1). Dus $\mathfrak{g}$ beschrijft inderdaad de infinitesimale actie van $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ op S^{n-1} .

Om de theorie uit mijn proefschrift direct toe te passen, moeten we complexificeren; dan vinden we gewoon de actie van $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C})$ op de niet-ontaarde quadriek $Q(\mathbb{C})$ —alle quadratische vormen zijn equivalent. De stabilisator van een punt $x_0 \in Q(\mathbb{C})$ is een zogenaamde parabolische ondergroep met Lie-algebra $\mathfrak{p}(\mathbb{C})$. Mijn proefschrift behandelt paren zoals $(\mathfrak{so}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{p}(\mathbb{C}))$; die geven een infinitesimale beschrijving van de meetkunde die we zojuist hebben bekeken. Er staat onder andere in mijn proefschrift dat dit specifieke paar maximaal is onder de eindig-dimensionale paren, en daaruit volgt de uitspraak makkelijk. Althans, strict genomen volgt eerst de uitspraak dat er geen eindig-dimensionale Lie-algebra van *analytische* vectorvelden in de buurt van x_0 bestaat die $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ strict bevat, maar het is eenvoudig in te zien dat elke eindig-dimensionale *gladde* uitbreiding automatisch analytisch in de buurt van x_0 zou moeten zijn. $\square$

In 1995 of 1996 fiestste ik een keer met een huisgenote, die bouwkunde studeerde, naar de TU/e; toen misschien nog TUe. Bij aankomst bleek haar eerste uur uit te vallen, en ze besloot een uurtje met mij college te volgen—Tensorrekening en Differentiaalmeetkunde. Jan begon net met oppervlakken in $\mathbb{R}^3$. Na dat uur duizelde het haar: zonder de details te snappen, begreep ze dat hier fundamentele eigenschappen van oppervlakken werden beschreven. Maar anders dan in haar vak—ze had toen al voor architectuur gekozen—hadden die wiskundigen geen fancy plaatjes nodig om hun ideeën over te brengen. Met een paar in haar ogen onbeholpen schetsjes en een enkele formule—nog extra beknopt opgeschreven met die vermadelijde summatieconventie van Einstein—kon je zoveel moois ineens uitdrukken. Ik hoop dat wij, de nieuwe generatie medewerkers van de wiskunde-afdeling, in onze studenten diezelfde fascinatie zullen ontsteken!